Journal of Industrial Innovations

https://jii.araku.ac.ir

ISSN: 3092-7811

A Stochastic MILP Model for Multi-Factory Production Planning under Uncertainty: Failures, Rework and Outsourcing

Omid Poursabzi[a], Mohammad Mohammadi[b*], Bahman Naderi[c]

[a] Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran. omid.poursabzi@gmail.com
[b] Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran. mohammadi@khu.ac.ir
[c] Department of Mechanical, Automotive & Materials Engineering, University of Windsor, Windsor, Canada. bahman_naderi62@yahoo.com

Original Article

Use your device to scan and read the article online

Citation: Poursabzi O, Mohammadi M, Naderi B. A Stochastic MILP Model for Multi-Factory Production Planning under Uncertainty: Failures, Rework, and Outsourcing. Journal of Industrial Innovations. 2026; 4(3): 77-101.

https://doi.org/10.22034/jii.2026.737501

KEYWORDS

Production planning;
Mathematical modeling;
Multi-period multi-product;
Uncertainty;
Profit optimization.

ABSTRACT

This paper presents a multi-period, multi-product mixed-integer linear programming (MILP) model for production planning in a multi-factory environment with limited capacities, where customer demands must be satisfied over the planning horizon. In the proposed model, outsourcing strategies are also incorporated as an alternative means of meeting demand.

Another important aspect considered in the model is the presence of various types of potential failures in the production line. Some defective items can be repaired and sold as new products, some imperfect products are sellable at a reduced price, while others are classified as scrap. Moreover, machine processing times and setup times are assumed to be uncertain. By employing a stochastic optimization approach, a linear model is developed that provides feasible and robust solutions against data fluctuations within a specified uncertainty set.

The objective function aims to maximize the total profit of the manufacturing system, defined as the difference between total revenue from product sales and the overall system costs, including production, setup, inventory holding, shortage, scrap, and inter-factory transportation costs, while satisfying production capacity constraints, inventory balance, and material flow constraints across multiple factories.

To evaluate the performance of the proposed model, a numerical example is first designed, and the results are compared with those obtained from deterministic and stochastic approaches. Subsequently, a sensitivity analysis with respect to key parameters is conducted, demonstrating that the proposed model exhibits stable behavior under parameter variations. Finally, Monte Carlo simulation is employed for validation purposes, confirming the superior performance of the stochastic model compared to deterministic and conventional stochastic models, particularly under conditions of severe parameter uncertainty.

Extended Abstract

1. Introduction

In recent decades, increasing competition in global markets, resource limitations, demand volatility, shorter product life cycles, and strict delivery requirements have created significant challenges for manufacturing firms in production planning and control. Traditional planning approaches, which are typically based on deterministic assumptions, are often unable to cope with these complexities. As a result, such approaches may lead to increased operational costs, lower service levels, and inefficient utilization of production resources. Consequently, the development of advanced decision-making models that can

* Corresponding author,
E-mail address: mohammadi@khu.ac.ir
DOI: https://doi.org/10.22034/jii.2026.737501
Received: May 9, 2026; Received in revised form: June 23, 2026; Accepted: July 7, 2026.
Article type: Research Paper

explicitly consider uncertainty in key parameters such as processing times, setup times, production capacities, and defect rates has become a major research focus in production management and operations research.

Another important trend in modern manufacturing systems is the increasing adoption of outsourcing strategies. Many firms outsource part of their production or logistics activities to external suppliers in order to reduce costs, increase flexibility, shorten lead times, and focus on core competencies. However, outsourcing decisions are typically associated with considerable uncertainty in terms of delivery time, product quality, supplier reliability, and price fluctuations. Integrating outsourcing decisions with internal production planning decisions—such as production allocation, inventory planning, and inter-factory transportation—within a unified framework has therefore received growing attention in recent research. Such integrated models can improve resource utilization, reduce the risk of shortages, and enhance overall supply chain performance.

In addition, multi-factory production systems have become increasingly common in modern supply chains. In these systems, multiple manufacturing facilities collaboratively produce a set of products while sharing resources and capacities. Although this structure increases operational flexibility and improves responsiveness to demand fluctuations, it also significantly increases decision-making complexity. Decisions regarding production allocation among factories, production quantities in each period, inventory management, and inter-factory transfers must be coordinated simultaneously. Addressing these challenges requires advanced optimization models capable of capturing the structural complexity and uncertainty inherent in such systems.

2. Problem Statement

Despite the extensive literature on production planning, many classical studies focus on single-factory environments and assume deterministic parameters. In these models, production times, setup times, and production yields are typically considered fixed values, which does not adequately reflect the variability present in real manufacturing environments. As a result, the generated production plans may become inefficient or even infeasible when actual operating conditions deviate from assumed parameter values. To overcome this limitation, several studies have incorporated uncertainty into production planning models using stochastic or fuzzy approaches. However, these methods often require detailed statistical information about parameter distributions, which may not always be available in practice.

Recently, uncertainty-based optimization approaches have emerged as an effective framework for addressing parameter variability in production planning problems. Instead of relying on precise probability distributions, these approaches define uncertainty sets that represent possible variations in uncertain parameters. The objective is to determine solutions that remain feasible and perform satisfactorily across different realizations within these uncertainty sets. This framework provides robust and reliable decision-making tools without requiring extensive statistical data. Nevertheless, most existing studies applying such approaches have focused on relatively simple systems and have paid limited attention to complex multi-factory production environments.

To address these gaps, this study develops a multi-period, multi-product mixed-integer linear programming (MILP) model for a capacitated multi-factory production planning problem under uncertainty. The proposed model simultaneously considers uncertainty in processing times, setup times, and defect rates. In addition to determining optimal production quantities for each product, factory, and period, the model incorporates decisions related to outsourcing, management of defective products, and the utilization of available production capacities. The uncertainty is modeled using an uncertainty-based optimization framework, allowing the model to generate stable and reliable production plans while controlling excessive conservatism in the solutions.

3. Methodology and its results

The proposed study employs a chance-constrained programming (CCP) approach to address uncertainty in key operational parameters such as processing times and setup times within a multi-factory production planning framework. The model transforms the uncertain constraints into their CCP equivalents, enabling the decision-maker to explicitly control the confidence level associated with constraint satisfaction. This reformulation prevents the optimistic bias that often arises in deterministic models and improves the reliability of the resulting production plans. In this context, constraint (3) is rewritten using the CCP structure to incorporate probabilistic guarantees for feasibility.

To evaluate the robustness of the proposed CCP-based model, a Monte Carlo simulation with 50 independent scenarios was conducted. Random realizations of uncertain parameters were generated based on normal distributions for processing and setup times. For each scenario, both the deterministic and CCP models were solved, and their objective values were compared. As expected, the deterministic model produced higher objective values due to the absence of uncertainty; however, its solutions were revealed to be less stable and more prone to infeasibility in fluctuating environments. In contrast, the CCP model delivered lower but more realistic objective values by spreading the effects of uncertainty across production and setup decisions. Additional experiments showed that adjusting the confidence parameter ω significantly affects the objective value, with up to a 13% increase when the confidence level decreases below 0.5, and about a 2% reduction when it exceeds 0.5.

A detailed computational analysis was performed by solving 2,744 problem instances to examine the complexity of the model under different sizes of parameter sets. For each run, the number of variables, constraints, and solution times were recorded. A strong linear relationship between the number of variables and constraints was observed, indicating that both grow proportionally as the problem size increases. Compared to the deterministic model, the CCP model exhibited heavier-tailed solve-time distributions and higher variability, reflecting the additional computational burden of handling uncertain parameters. Cluster analysis further showed that scenarios in the CCP model overlap more, suggesting greater structural diversity induced by uncertainty.

4. Key Findings

The Monte Carlo simulation results demonstrate that the deterministic model performs well only under idealized conditions and rapidly loses effectiveness as uncertainty increases. Its objective value sharply decreases in the presence of parameter deviations, indicating high vulnerability to operational fluctuations. In contrast, the CCP model exhibits smoother degradation in performance across scenarios and maintains higher stability due to its built-in probabilistic protection against uncertainty. This behavior is especially valuable in real industrial environments, where unpredictable disturbances are common and data may be incomplete.

From an optimization perspective, the CCP model achieves a favorable balance between economic performance and operational resilience. Although its objective value is slightly lower than that of the deterministic model, it provides solutions that remain feasible across a wide range of uncertain realizations. The dual-protection structure in the CCP formulation allows independent control of conservatism for processing time and setup time uncertainties, offering decision-makers enhanced flexibility when fine-tuning system robustness. The computational experiments also show that the multi-factory structure—particularly the number of factories—has the greatest impact on computational complexity, significantly increasing the number of variables, constraints, and solve times.

Overall, the results confirm that the proposed CCP-based MILP model outperforms both deterministic and classical stochastic approaches in environments characterized by uncertainty. Its robustness, flexibility, and capacity to produce feasible production plans under fluctuating conditions make it a strong candidate for practical implementation in real manufacturing systems. The insights obtained from the numerical experiments and simulation results also offer a solid foundation for managerial decision-making, particularly in the design of resilient production and outsourcing policies for multi-factory supply chains.

نوآوری‌های صنعتی

شاپا: ۷۸۱۱-۳۰۹۲

یک مدل تصادفی MILP برای برنامه‌ریزی تولید چندکارخانه‌ای تحت عدم قطعیت: خرابی‌ها، بازکاری و برون‌سپاری

امید پورسبزی[الف]، محمد محمدی[ب*]، بهمن نادری[ج]

[الف] گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. Omid.Poursabzi@gmail.com

[ب] گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. mohammadi@khu.ac.ir

[ج] دپارتمان مهندسی مکانیک، اتوماسیون و مواد، دانشگاه ویندزور، ویندزور، کانادا. bahman_naderi62@yahoo.com

واژگان کلیدی

برنامه‌ریزی تولید؛ مدلسازی ریاضی؛ چند دوره‌ای-چند محصولی؛ عدم قطعیت؛ بهینه‌سازی سود.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۲/۱۹

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۴/۰۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۱۶

چکیده

این مقاله به ارائه یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی خطی عدد صحیح چند دوره‌ای و چند محصولی برای برنامه‌ریزی تولید می‌پردازد که در آن چندین کارخانه با ظرفیت‌های محدود به پاسخگویی تقاضاهای مشتریان می‌پردازند. در مدل ارائه‌شده، از استراتژی برونسپاری می‌توان برای پاسخگویی به تقاضا نیز بهره برد. یکی دیگر از موضوعات مهمی که مدل در نظر می‌گیرد، توجه به انواع خرابی‌های محتمل در خط تولید است که بعضاً برخی از آنها قابلیت تعمیر و فروش به شکل محصول نو، برخی از کالاهای معیوب قابل‌فروش و برخی دیگر نیز اسقاطی هستند. در این مدل، زمان‌های پردازش و راه‌اندازی ماشین‌ها به‌صورت غیرقطعی در نظر گرفته‌شده و با به‌کارگیری رویکرد بهینه‌سازی احتمالی، یک مدل خطی توسعه می‌یابد که در برابر نوسانات داده‌ها در بازه‌ای مشخص از عدم‌قطعیت، جواب‌های شدنی و پایدار ارائه می‌کند. تابع هدف، حداکثرسازی سود کارخانه ناشی از تفاضل کل هزینه سیستم شامل هزینه‌های تولید، راه‌اندازی، نگهداری موجودی، کمبود، ضایعات، و انتقال بین کارخانه‌ها از سود حاصل از فروش است؛ به‌طوری‌که محدودیت‌های ظرفیت تولید، توازن موجودی و جریان مواد در سطح چند کارخانه‌ای رعایت شود. برای بررسی کارایی مدل، ابتدا یک مثال عددی طراحی و نتایج مدل با رویکردهای قطعی و تصادفی مقایسه می‌شود. سپس تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای کلیدی انجام و نشان داده می‌شود که مدل پیشنهادی در برابر تغییرات پارامترها رفتار باثباتی دارد. به‌منظور اعتبارسنجی، از شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده شده است که برتری عملکرد مدل احتمالی را نسبت به مدل‌های قطعی و تصادفی، به‌ویژه در شرایط نوسان شدید پارامترها، تأیید می‌کند.

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر، افزایش شدت رقابت در بازارهای جهانی، محدودیت منابع، نوسانات تقاضا، کاهش چرخه عمر محصولات، و الزامات تحویل به‌موقع، سازمان‌های تولیدی را با چالش‌های پیچیده‌ای در برنامه‌ریزی و کنترل تولید مواجه کرده است [۱]. در چنین محیطی، اتکا به روش‌های سنتی برنامه‌ریزی که بر فرض قطعیت داده‌ها استوارند، دیگر پاسخگوی نیازهای تصمیم‌گیران نیست و می‌تواند منجر به افزایش هزینه‌ها، کاهش سطح خدمت به مشتری و افت بهره‌وری عملیاتی شود [۲]. ازاین‌رو، توسعه مدل‌های تصمیم‌گیری پیشرفته که بتوانند ابعاد مختلف عدم‌قطعیت را در پارامترهای کلیدی نظیر زمان‌های تولید، زمان‌های

* نویسنده مسئول؛

آدرس پست الکترونیک: mohammadi@khu.ac.ir

آماده‌سازی، ظرفیت‌ها و نرخ ضایعات در نظر بگیرند، به یکی از محورهای اصلی پژوهش در مدیریت تولید و تحقیق در عملیات تبدیل شده است [۳،۴].

از سوی دیگر، بررسی مطالعات اخیر نشان می‌دهد که برونسپاری بخشی از فعالیت‌های تولیدی و لجستیکی به تأمین‌کنندگان بیرونی به یکی از راهبردهای کلیدی در برنامه‌ریزی تولید تبدیل شده است. فشار فزاینده برای کاهش هزینه، افزایش انعطاف‌پذیری، کوتاه‌کردن زمان تحویل و تمرکز بر شایستگی‌های محوری، بسیاری از بنگاه‌ها را واداشته است تا به‌عنوان بخشی از ظرفیت تولید خود روی توان پیمانکاران خارجی یا شرکای برون‌سازمانی حساب کنند [۵]. بااین‌حال، تصمیم‌های برونسپاری معمولاً با عدم‌قطعیت‌های قابل‌توجهی در زمان تأمین، کیفیت، قابلیت اطمینان عرضه‌کننده و نوسان قیمت‌ها همراه است [۶]. ادغام تصمیمات برونسپاری با تصمیمات اصلی برنامه‌ریزی تولید (نظیر تعیین سطح تولید داخلی، تخصیص سفارش به کارخانجات، و انتقال بین‌کارخانه‌ای) در یک چارچوب یکپارچه، به‌طور فزاینده‌ای در ادبیات اخیر موردتوجه قرار گرفته است [۷، ۶]. پژوهش‌های جدید نشان می‌دهد که مدل‌های برنامه‌ریزی تولید چندکارخانه‌ای که به‌صورت هم‌زمان با ظرفیت داخلی، امکان برونسپاری را نیز فراهم می‌کنند، می‌توانند به کاهش ریسک کمبود، بهبود سطح خدمت و استفاده کاراتر از منابع کمک کنند. در این زمینه، استفاده از رویکردهای حاوی تصمیمات برونسپاری، ابزار مناسبی برای مدیریت نوسانات بازار و عدم‌قطعیت‌های عملیاتی فراهم می‌کند و شکاف موجود بین تصمیمات تاکتیکی تولید و تصمیمات راهبردی برونسپاری را تا حدی پر می‌سازد [۸].

یکی از حوزه‌های مورد توجه در این زمینه، مسائل برنامه‌ریزی تولید در سیستم‌های چندکارخانه‌ای است که در آن چندین کارخانه به‌صورت هم‌زمان و هماهنگ به تولید مجموعه‌ای از محصولات مشترک یا مکمل می‌پردازند [۹]. این نوع سیستم‌ها اگرچه می‌توانند با تجمیع منابع و تسهیم‌ها، انعطاف‌پذیری و بهره‌وری زنجیره تأمین را افزایش دهند، اما به‌طور هم‌زمان پیچیدگی تصمیم‌گیری را نیز به‌طور چشمگیری بالا می‌برند. در چنین ساختاری، تصمیم‌گیری درباره تخصیص محصولات به کارخانه‌ها، تعیین حجم تولید در هر دوره، برنامه‌ریزی موجودی و حمل‌ونقل بین کارخانه‌ها همگی باید به‌صورت یکپارچه و هماهنگ انجام شود [۱۰].

با وجود مطالعات متعدد در زمینه برنامه‌ریزی تولید، بخش قابل‌توجهی از پژوهش‌های کلاسیک بر مدل‌های تک‌کارخانه‌ای و با فرض داده‌های قطعی متمرکز بوده‌اند. در این مطالعات، زمان‌های تولید و آماده‌سازی، ظرفیت‌ها و نرخ بازده تولید، اغلب به‌صورت مقادیر ثابت در نظر گرفته می‌شوند و به‌این‌ترتیب تأثیر نوسانات واقعی محیط تولید نادیده گرفته می‌شود. این رویکرد در عمل می‌تواند منجر به ایجاد برنامه‌هایی شود که در مواجهه با انحرافات کوچک در پارامترها، کارایی خود را از دست می‌دهند یا حتی غیرقابل اجرا می‌شوند. به‌منظور رفع این کاستی، پژوهش‌های بعدی به سمت در نظر گرفتن عدم‌قطعیت در قالب مدل‌های احتمالی (تصادفی) یا فازی حرکت کرده‌اند. هرچند این مدل‌ها تصویر واقع‌بینانه‌تری از محیط عملیاتی ارائه می‌کنند، اما معمولاً نیازمند اطلاعات آماری دقیق درباره توزیع پارامترها بوده و در عمل ممکن است به‌دلیل نبود داده‌های کافی، دقت لازم را نداشته باشند [۲].

در سال‌های اخیر، رویکردهای بهینه‌سازی تحت عدم‌قطعیت به‌عنوان چارچوبی کارآمد برای برخورد با نوسانات در مسائل برنامه‌ریزی تولید مطرح شده است. در این رویکردها، به‌جای فرض توزیع احتمالی مشخص برای پارامترهای نامعین، مجموعه‌ای از سناریوهای ممکن یا بازه‌ای از مقادیر مجاز برای هر پارامتر تعریف می‌شود و هدف، یافتن راه‌حلی است که در برابر حالت‌های مختلف ممکن در این مجموعه، عملکرد قابل قبولی داشته باشد. مزیت اصلی این رویکرد، عدم نیاز به اطلاعات آماری دقیق و ارائه راه‌حل‌هایی است که در برابر نوسانات پارامترها پایدار و قابل اتکا باقی می‌مانند [۱۱]. بااین‌حال، بخش عمده‌ای از مطالعات بهینه‌سازی تحت عدم‌قطعیت در برنامه‌ریزی تولید، بر سیستم‌های تک‌کارخانه‌ای یا مدل‌هایی با ساختار نسبتاً ساده متمرکز بوده و کمتر به پیچیدگی‌های خاص سیستم‌های چندکارخانه‌ای پرداخته‌اند [۲].

با وجود پیشرفت‌های قابل‌توجه در ادبیات موضوع، هنوز شکاف‌های مهمی در این حوزه وجود دارد. تعداد اندکی از پژوهش‌ها

به‌طور هم‌زمان به ساختار چندکارخانه‌ای، عدم‌قطعیت در پارامترها و وجود محصولات معیوب پرداخته‌اند [۱۲]. اغلب مدل‌های موجود، امکان برونسپاری محصولات بین کارخانه‌ها را به‌منظور متعادل‌سازی بار کاری و کاهش هزینه‌های کل شبکه در نظر نمی‌گیرند [۸]. همچنین بسیاری از مطالعات به تحلیل عددی محدود می‌شوند و کمتر مدلی با داده‌های واقعی صنعتی اعتبارسنجی شده است تا قابلیت کاربرد آن در شرایط عملی نشان داده شود [۱].

در پاسخ به این شکاف‌ها، این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط خطی (MILP) مبتنی بر رویکرد بهینه‌سازی احتمالی برای سیستم‌های چندکارخانه‌ای ارائه می‌کند که در آن، عدم‌قطعیت در زمان‌های تولید و راه‌اندازی و نرخ محصولات معیوب به‌طور هم‌زمان در نظر گرفته شده است. در مدل پیشنهادی، علاوه بر برنامه‌ریزی حجم تولید هر محصول در هر کارخانه و دوره، تصمیمات مربوط به حجم برونسپاری محصولات بین‌کارخانه‌ها، مدیریت محصولات معیوب و استفاده از ظرفیت‌ها نیز مدل‌سازی شده است [۱۳، ۱۴]. عدم‌قطعیت پارامترها با بهره‌گیری از چارچوب بهینه‌سازی احتمالی در قالب مجموعه‌های عدم‌قطعیت مناسب فرموله شده است، به‌گونه‌ای که ضمن کنترل محافظه‌کاری مدل، از انحراف شدید راه‌حل از شرایط واقعی جلوگیری شود [۹].

برای ارزیابی کارایی مدل پیشنهادی، ابتدا یک مثال عددی طراحی و عملکرد آن با رویکردهای قطعی و تصادفی مقایسه شده است [۲]. سپس، با انجام تحلیل حساسیت بر روی پارامترهای کلیدی، اثر تغییرات آن‌ها بر تابع هدف و سیاست‌های تولید و موجودی بررسی شده است [۱]. در ادامه، به‌منظور اعتبارسنجی عملی مدل، یک مطالعه موردی در یکی از شرکت‌های تولیدی فعال در صنعت تولید لوازم آشپزی اجرا شده که در آن، داده‌های واقعی سیستم چندکارخانه‌ای استخراج و مدل پیشنهادی بر روی آن پیاده‌سازی و تحلیل شده است. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که مدل ارائه‌شده می‌تواند با در نظر گرفتن عدم‌قطعیت‌های موجود، برنامه‌های تولیدی واقع‌بینانه‌تری ارائه داده و درعین‌حال سود کل سیستم را نسبت به رویکردهای متداول افزایش دهد [۱۰].

به‌طور خلاصه، نوآوری اصلی این پژوهش در ترکیب هم‌زمان سه بعد کلیدی است: (۱) ساختار چندکارخانه‌ای با امکان جابه‌جایی بین‌کارخانه‌ای [۳]، (۲) عدم‌قطعیت در زمان‌های تولید و آماده‌سازی در چارچوب بهینه‌سازی احتمالی [۵] و (۳) لحاظ کردن صریح محصولات معیوب و سیاست‌های مرتبط با آن‌ها در مدل برنامه‌ریزی تولید [۱۲]. این ترکیب، شکاف موجود در ادبیات برنامه‌ریزی تولید را پوشش داده و می‌تواند به‌عنوان ابزاری کارا برای تصمیم‌گیران در محیط‌های تولیدی پیچیده و نامطمئن مورد استفاده قرار گیرد [۱۵].

سایر بخش‌های مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش دوم، مرور ادبیات مرتبط با مساله موردبررسی ارائه می‌شود. بخش سوم، مسئله موردمطالعه را تشریح کرده و مدل ریاضی عدد صحیح مختلط را توسعه می‌دهد. بخش چهارم، نتایج مثال عددی، تحلیل حساسیت و اعتبارسنجی مدل را گزارش می‌کند. در بخش پنجم، نتایج اصلی، دلالت‌های مدیریتی و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی را ارائه می‌دهد.

۲- مرور ادبیات

برنامه‌ریزی تولید همواره یکی از موضوعات محوری در مدیریت عملیات و زنجیره تأمین بوده است، اما تغییرات گسترده در محیط کسب‌وکار و پیچیده‌تر شدن شبکه‌های تولیدی، ماهیت این مسئله را نسبت به گذشته دگرگون کرده است. افزایش نوسانات بازار، محدودیت منابع، الزامات تحویل به‌موقع، پراکندگی جغرافیایی واحدهای تولیدی و ضرورت پاسخگویی سریع به تغییرات تقاضا، موجب شده است که مدل‌های سنتی برنامه‌ریزی تولید دیگر نتوانند تمامی ابعاد تصمیم‌گیری در محیط‌های صنعتی مدرن را پوشش دهند. در نتیجه، پژوهش‌های سال‌های اخیر به سمت توسعه مدل‌هایی حرکت کرده‌اند که بتوانند به‌صورت همزمان ساختارهای چندکارخانه‌ای، عدم‌قطعیت‌های عملیاتی، ملاحظات کیفیت و تصمیمات برون‌سپاری را در فرآیند برنامه‌ریزی لحاظ کنند.

بخش قابل‌توجهی از مطالعات اولیه در حوزه برنامه‌ریزی تولید بر محیط‌های تک‌کارخانه‌ای متمرکز بودند و فرض می‌کردند

که پارامترهایی نظیر ظرفیت تولید، زمان‌های پردازش، زمان‌های راه‌اندازی و کیفیت محصولات به‌صورت قطعی و از پیش مشخص در دسترس هستند. اگرچه این فرضیات موجب ساده‌تر شدن مدل‌ها می‌شد، اما فاصله قابل‌توجهی با شرایط واقعی سیستم‌های تولیدی داشت. توسعه شبکه‌های تولیدی و ظهور ساختارهای چندسایتی سبب شد تا پژوهشگران به سمت مدل‌سازی هماهنگ تصمیمات تولید، موجودی، حمل‌ونقل و توزیع در سطح شبکه حرکت کنند. در این راستا، مدل‌های برنامه‌ریزی یکپارچه برای هماهنگی جریان مواد و تخصیص تولید میان کارخانه‌های مختلف توسعه یافتند و تلاش شد تا ارتباط میان تصمیمات تولیدی و لجستیکی در قالب یک چارچوب واحد مورد بررسی قرار گیرد [۱۶–۱۸].

همزمان با گسترش ساختارهای چندکارخانه‌ای، مسئله مدیریت عدم‌قطعیت نیز به یکی از دغدغه‌های اصلی پژوهشگران تبدیل شد. در محیط‌های واقعی، پارامترهایی نظیر تقاضا، زمان تولید، زمان راه‌اندازی، ظرفیت در دسترس و حتی هزینه‌های عملیاتی همواره در معرض تغییر و نوسان قرار دارند. ازاین‌رو، استفاده از مدل‌های قطعی می‌تواند منجر به ارائه برنامه‌هایی شود که در عمل قابلیت اجرا یا پایداری کافی نداشته باشند. برای مواجهه با این چالش، رویکردهای مختلفی در ادبیات توسعه‌یافته‌اند که مهم‌ترین آن‌ها شامل برنامه‌ریزی تصادفی، بهینه‌سازی مقاوم و مدل‌های فازی است.

در رویکرد برنامه‌ریزی تصادفی، عدم‌قطعیت از طریق سناریوها یا توزیع‌های احتمالی مدل‌سازی می‌شود. این رویکرد تلاش می‌کند رفتار آینده سیستم را بر اساس اطلاعات آماری موجود پیش‌بینی کرده و تصمیماتی اتخاذ کند که عملکرد مناسبی در سناریوهای مختلف داشته باشند. برای مثال، باناسیک و همکاران [۱۹] در مطالعه‌ای بر زنجیره تأمین محصولات کشاورزی، اثر همزمان عدم‌قطعیت تقاضا و ملاحظات زیست‌محیطی را بررسی کردند. همچنین هو و هو [۲۰] با استفاده از یک مدل دومرحله‌ای تصادفی، مسئله تعیین اندازه دسته و زمان‌بندی تولید را در شرایط تقاضای نامطمئن موردمطالعه قرار دادند. با وجود مزایای این رویکرد، وابستگی آن به داده‌های آماری معتبر و افزایش شدید پیچیدگی محاسباتی در مسائل بزرگ‌مقیاس، از مهم‌ترین محدودیت‌های آن محسوب می‌شود.

در نقطه مقابل، بهینه‌سازی مقاوم با هدف کاهش وابستگی مدل به اطلاعات احتمالی توسعه‌یافته است. در این رویکرد، به‌جای تعریف توزیع احتمال، بازه‌ها یا مجموعه‌های عدم‌قطعیت برای پارامترهای نامطمئن در نظر گرفته می‌شود و مدل به دنبال یافتن راه‌حل‌هایی است که در برابر تغییرات احتمالی پارامترها عملکرد قابل قبولی داشته باشند. برای نمونه، جبارزاده و همکاران [۲۱] یک مدل مقاوم برای برنامه‌ریزی یکپارچه تولید و توزیع ارائه کردند که علاوه بر اهداف اقتصادی، ملاحظات زیست‌محیطی را نیز در نظر می‌گرفت. نتایج پژوهش آن‌ها نشان داد که استفاده از سیاست‌های انعطاف‌پذیر می‌تواند اثرات منفی عدم‌قطعیت را کاهش دهد و پایداری شبکه را بهبود بخشد.

گروه دیگری از پژوهش‌ها نیز از منطق فازی برای مدل‌سازی عدم‌قطعیت بهره گرفته‌اند. این رویکرد به‌ویژه در شرایطی کاربرد دارد که داده‌های آماری کافی برای برآورد توزیع پارامترها در دسترس نباشد. در این زمینه، غلامیان و همکاران [۲۲] یک مدل برنامه‌ریزی تجمیعی چندمحصولی و چندسایتی ارائه کردند که در آن چندین هدف متضاد به‌طور همزمان و در محیطی فازی مورد بررسی قرار گرفت. علاوه بر این، برخی پژوهشگران با ترکیب مزایای رویکردهای مختلف، مدل‌های هیبریدی نظیر استوار–فازی و استوار–تصادفی را توسعه داده‌اند. با وجود این پیشرفت‌ها، استفاده از چنین مدل‌هایی در محیط‌های چندکارخانه‌ای پیچیده هنوز محدود بوده و نیازمند مطالعات بیشتری است.

در کنار مسئله عدم‌قطعیت، توجه به کیفیت محصولات نیز به‌تدریج جایگاه مهمی در ادبیات برنامه‌ریزی تولید پیداکرده است. بسیاری از مدل‌های اولیه فرض می‌کردند که تمامی اقلام تولیدشده سالم و قابل‌عرضه به بازار هستند؛ درحالی‌که در عمل بخشی از تولید به‌صورت محصولات معیوب، قابل تعمیر، قابل بازیافت یا ضایعات ظاهر می‌شود. همین موضوع موجب شد تا پژوهشگران نقش کیفیت و مدیریت اقلام معیوب را در فرآیند برنامه‌ریزی تولید موردتوجه قرار دهند. احمد و همکاران [۲۳] تأثیر همزمان اقلام ناقص، سیاست‌های دوباره‌کاری و شرایط پرداخت را در زنجیره‌های تأمین جهانی بررسی کردند. تیواری و همکاران [۲۴] نیز نشان دادند که در نظر گرفتن اقلام معیوب و فسادپذیر می‌تواند به‌طور مستقیم بر عملکرد اقتصادی و زیست‌محیطی سیستم

تأثیر بگذارد. مطالعات دیگری نیز به بررسی نقش بازیافت، بازتولید و مدیریت محصولات برگشتی در زنجیره‌های تأمین پایدار پرداخته‌اند [۲۵،۲۶].

موضوع دیگری که در سال‌های اخیر موردتوجه قرارگرفته، استفاده از ظرفیت‌های برون‌سپاری برای افزایش انعطاف‌پذیری سیستم‌های تولیدی است. در بسیاری از صنایع، برون‌سپاری بخشی از تولید به تأمین‌کنندگان یا کارخانه‌های همکار به‌عنوان ابزاری برای مقابله با محدودیت ظرفیت، کاهش هزینه‌ها و پاسخگویی سریع‌تر به تقاضا مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این زمینه، بولاکسیل و همکاران [۸] نشان دادند که تخصیص انعطاف‌پذیر ظرفیت در شبکه‌های برون‌سپاری‌شده می‌تواند عملکرد عملیاتی را بهبود بخشد. همچنین ژن [۳] با توسعه یک مدل چندمحصولی و چنددوره‌ای، نحوه ایجاد تعادل میان تولید داخلی و برون‌سپاری را در شرایط تقاضای نامطمئن موردبررسی قرار داد.

مطالعات مروری منتشرشده در سال‌های اخیر نیز تصویری روشن از روندهای پژوهشی این حوزه ارائه می‌کنند. مولا و همکاران [۲] نشان دادند که بخش عمده پژوهش‌های برنامه‌ریزی تولید تحت عدم‌قطعیت بر تقاضا و هزینه‌ها متمرکز بوده و سایر منابع عدم‌قطعیت عملیاتی کمتر موردتوجه قرارگرفته‌اند. همچنین در مطالعه دیگری، همین پژوهشگران بر اهمیت یکپارچه‌سازی تصمیمات تولید، موجودی و حمل‌ونقل در زنجیره‌های تأمین چندسطحی تأکید کردند [۹]. نتایج مرور جامع رئوفی و همکاران [۱] نیز نشان می‌دهد که اگرچه استفاده از رویکردهای تصادفی، مقاوم و فازی به‌طور چشمگیری افزایش یافته است، اما همچنان خلأهای مهمی در مدل‌سازی همزمان چندین منبع عدم‌قطعیت، به‌ویژه در محیط‌های چندمحصولی و چندکارخانه‌ای، وجود دارد.

بررسی مجموعه مطالعات پیشین نشان می‌دهد که هرچند پیشرفت‌های قابل‌توجهی در زمینه برنامه‌ریزی تولید تحت عدم‌قطعیت حاصل‌شده است، اما اغلب پژوهش‌ها تنها بخشی از پیچیدگی‌های موجود در محیط‌های صنعتی واقعی را پوشش می‌دهند. بسیاری از مدل‌ها یا بر ساختار چندکارخانه‌ای تمرکز دارند و کیفیت را نادیده می‌گیرند، یا به مدیریت اقلام معیوب می‌پردازند بدون آنکه عدم‌قطعیت‌های عملیاتی را لحاظ کنند. همچنین تلفیق همزمان تصمیمات تولید، برون‌سپاری، انتقال بین کارخانه‌ها و مدیریت محصولات معیوب در کنار عدم‌قطعیت زمان‌های تولید و راه‌اندازی، کمتر موردتوجه قرارگرفته است. این شکاف پژوهشی انگیزه اصلی توسعه مدل پیشنهادی در پژوهش حاضر را شکل می‌دهد.

جدول ۱ مرور ادبیات

منبع	چندکارخانه‌ای	عدم قطعیت	کنترل کیفیت و نرخ خرابی	برون‌سپاری	سطح تصمیم‌گیری
Christopher & Holweg (2017)	✗	✗	✗	✓	Strategic
Stadtler (2015)	✗	✗	✗	✗	Tactical
Mula et al. (2010)	✗	✓ (Demand)	✗	✗	Tactical
Jaber et al. (2024)	✗	✓	Limited	Limited	Review
Kolus et al. (2020)	✗	✗	✗	✗	Tactical
Govindan et al. (2015)	✓	✓ (Scenario)	Limited	✓	Strategic
Pishvaee et al. (2009)	✓	✗	✗	✓	Strategic
Kenn & Müller (2012)	✗	✓ (Demand)	✗	✗	Tactical
Dohale et al. (2021)	✓	✓ (Demand)	✗	✓	Tactical
Boulaksil et al. (2011)	✗	✓ (Lead time)	✗	✗	Operational
Mula et al. (2006)	✗	✓ (Fuzzy)	✗	✗	Tactical
Zhen et al. (2012)	✓	✓ (Scenario)	✗	✓	Strategic
This paper	✓	✓ (Proc. + Setup)	✓	✓	Tactical–Operational

باوجوداین پیشرفت‌ها، مرور ادبیات نشان می‌دهد که بیشتر مدل‌های موجود هر یک تنها بخشی از پیچیدگی‌های واقعی سیستم‌های تولیدی را در نظر می‌گیرند. به‌طور خاص، ترکیب هم‌زمان چندین منبع عدم‌قطعیت عملیاتی (مانند زمان‌های تولید

و تنظیم)، مسائل کیفیت و نرخ اقلام معیوب، و تصمیمات شبکه‌ای مانند انتقال بین کارخانه‌ها یا برون‌سپاری، در چارچوبی یکپارچه و چندسایتی هنوز به‌طور محدود موردبررسی قرار گرفته است. ازاین‌رو، توسعه مدل‌هایی که بتوانند این ابعاد را به‌صورت هم‌زمان در برنامه‌ریزی تولید در نظر بگیرند، می‌تواند به بهبود تصمیم‌گیری در سیستم‌های تولیدی پیچیده و شبکه‌های زنجیره‌تأمین مدرن کمک کند. با جمع‌بندی ادبیات موجود، می‌توان خلأهای زیر را شناسایی کرد که پژوهش حاضر تلاش می‌کند آن‌ها را پوشش دهد.

- ترکیب هم‌زمان چند نوع عدم‌قطعیت عملیاتی (زمان تولید و زمان تنظیم) در یک مدل ریاضی واحد برای محیط چندکارخانه‌ای، چندمحصولی و چنددوره‌ای، درحالی‌که اغلب مطالعات فقط یک یا دو نوع عدم‌قطعیت (معمولاً تقاضا یا ظرفیت) را در نظر می‌گیرند.
- استفاده از رویکرد «بهینه‌سازی احتمالی» برای کنترل سطح محافظه‌کاری به‌طور مستقل برای زمان‌های تولید و زمان‌های تنظیم، که انعطاف‌پذیری بیشتری به تصمیم‌گیرنده می‌دهد و در ادبیات موجود کمتر مورد استفاده قرار گرفته است.
- تلفیق تصمیمات تولید، انتقال بین کارخانه‌ها، برون‌سپاری و مدیریت اقلام معیوب در قالب یک مدل MILP یکپارچه، که هم هزینه‌های عملیاتی (تولید، تنظیم، نگهداری موجودی، انتقال) و هم هزینه‌های ناشی از اقلام معیوب و کمبود را به‌طور هم‌زمان در نظر می‌گیرد.
- اعتبارسنجی مدل در هر دو سطح عددی و موردکاوی صنعتی، همراه با تحلیل حساسیت پارامترهای عدم‌قطعیت و مقایسه عملکرد مدل مقاوم پیشنهادی با مدل‌های قطعی و تصادفی، که به‌ویژه در مطالعات اخیر توصیه‌شده اما هنوز به‌طور محدود اجراشده است.

۳- بیان مسئله و مدل ریاضی

در بسیاری از سیستم‌های تولیدی مدرن، بنگاه‌ها به‌صورت شبکه‌ای از چند کارخانه در نقاط جغرافیایی مختلف فعالیت می‌کنند و هم‌زمان چندین محصول را در افق‌های زمانی متعدد تولید و توزیع می‌نمایند. در چنین ساختارهایی، تصمیم‌گیری درباره میزان تولید هر محصول در هر کارخانه و هر دوره، تخصیص ظرفیت، برنامه‌ریزی راه‌اندازی خطوط تولید و نحوه پاسخ‌گویی به تقاضای بازار، به یک مسئله پیچیده و چندبعدی تبدیل می‌شود.

پیچیدگی این مسئله زمانی افزایش می‌یابد که سه عامل کلیدی به‌طور هم‌زمان در نظر گرفته شوند:

اول، وجود محصولات معیوب در فرآیند تولید. در محیط‌های واقعی، بخشی از تولید به دلیل خطاهای فرآیندی یا نوسانات عملیاتی، به‌صورت معیوب ظاهر می‌شود. این اقلام معیوب لزوماً همگن نیستند و می‌توانند شامل محصولات قابل تعمیر، محصولات قابل‌فروش با قیمت تنزیلی و ضایعات غیرقابل استفاده باشند که هر یک پیامد اقتصادی متفاوتی دارند.

دوم، عدم‌قطعیت در پارامترهای زمانی. زمان‌های تولید و زمان‌های راه‌اندازی ماشین‌آلات در عمل ثابت نبوده و تحت تأثیر عواملی نظیر فشار کاری، شرایط عملیاتی و نوسانات انسانی تغییر می‌کنند. نادیده گرفتن این عدم‌قطعیت می‌تواند منجر به برنامه‌هایی شود که در عمل قابلیت اجرا نداشته باشند.

سوم، محدودیت ظرفیت و ضرورت انتقال بین کارخانه‌ها. در یک سیستم چندکارخانه‌ای، ممکن است یک کارخانه به‌تنهایی قادر به پاسخ‌گویی کامل به تقاضا نباشد، لذا انتقال بین‌کارخانه‌ای به‌عنوان مکانیزمی برای جلوگیری از کمبود مطرح می‌شود.

با وجود مطالعات متعدد در حوزه برنامه‌ریزی تولید، اغلب پژوهش‌های پیشین تنها بخشی از این ابعاد را در نظر گرفته‌اند؛ به‌گونه‌ای که یا عدم‌قطعیت لحاظ نشده، یا محصولات معیوب به‌صورت تجمیعی مدل شده‌اند و یا ساختار تک‌کارخانه‌ای فرض شده است. خلأ موجود در ادبیات، توسعه مدلی یکپارچه است که این مؤلفه‌ها را به‌صورت هم‌زمان و در چارچوبی قابل‌حل در مقیاس صنعتی ترکیب کند.

بر این اساس، مسئله اصلی این پژوهش طراحی یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی چنددوره‌ای و چندکارخانه‌ای است که با در نظر گرفتن ساختار تفکیک‌شده اقلام معیوب، محدودیت ظرفیت، امکان انتقال بین کارخانه‌ها و عدم‌قطعیت در زمان‌های تولید و راه‌اندازی (مدل‌شده از طریق رویکرد CCP)، سود کل سیستم را حداکثر نماید.

به‌منظور تبیین جایگاه پژوهش، مشارکت‌های این مطالعه در سه بعد نظری، روش‌شناختی و مدیریتی قابل دسته بندی است:

از منظر نظری، این پژوهش ادبیات برنامه‌ریزی تولید تحت عدم‌قطعیت را با تلفیق هم‌زمان چند بعد تصمیم‌گیری که غالباً در مطالعات پیشین به‌صورت مجزا بررسی شده‌اند، توسعه می‌دهد. برخلاف بسیاری از پژوهش‌های پیشین که تنها بر یکی از ابعاد نظیر ساختار چندکارخانه‌ای، اقلام معیوب، یا عدم‌قطعیت در پارامترهای عملیاتی تمرکز داشته‌اند، در این تحقیق یک چارچوب یکپارچه برای محیطی چندکارخانه‌ای، چندمحصولی و چنددوره‌ای ارائه شده است. همچنین، اقلام معیوب در این مدل به‌صورت تجمیعی در نظر گرفته نشده‌اند، بلکه به سه دسته محصولات قابل تعمیر، محصولات معیوب قابل‌فروش با قیمت تنزیلی و ضایعات غیرقابل استفاده تفکیک شده‌اند. این تفکیک، ضمن افزایش واقع‌گرایی مدل، امکان بازنمایی دقیق‌تر جریان‌های اقتصادی ناشی از کیفیت محصول را فراهم می‌سازد.

از منظر روش‌شناختی، نوآوری اصلی پژوهش در به‌کارگیری رویکرد برنامه‌ریزی با محدودیت شانس برای مدل‌سازی عدم‌قطعیت در زمان تولید و زمان راه‌اندازی، در قالب یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط یکپارچه است. اگرچه در سال‌های اخیر رویکردهای بهینه‌سازی استوار توجه قابل‌توجهی را به خود جلب کرده‌اند، اما در شرایطی که داده‌های آماری معتبر برای برآورد رفتار پارامترهای نامطمئن در دسترس باشد، استفاده از CCP این امکان را فراهم می‌کند که تعادلی منطقی میان کنترل ریسک و کارایی اقتصادی برقرار شود و از محافظه‌کاری بیش‌ازحد اجتناب گردد. افزون بر این، مدل پیشنهادی، تصمیمات انتقال بین‌کارخانه‌ای را هم‌زمان با محدودیت عدم مجاز بودن کمبود و ملاحظات مربوط به کیفیت محصولات در ساختار خود ادغام می‌کند. ازاین‌رو، نوآوری روش‌شناختی پژوهش صرفاً در استفاده از CCP خلاصه نمی‌شود، بلکه در ادغام آن با ساختار یکپارچه تولید–توزیع و کیفیت در یک مدل قابل‌حل نهفته است.

از منظر مدیریتی، مدل پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان یک ابزار تصمیم‌یار برای مدیران تولید و برنامه‌ریزان زنجیره تأمین در محیط‌های دارای عدم‌قطعیت مورد استفاده قرار گیرد. این مدل به تصمیم‌گیرندگان کمک می‌کند تا مقدار تولید، نحوه تخصیص ظرفیت، سیاست‌های انتقال بین کارخانه‌ها و شیوه برخورد با محصولات معیوب را به‌گونه‌ای تعیین کنند که ضمن حداکثرسازی سود کل، قابلیت اجرای برنامه‌ها در شرایط واقعی نیز حفظ شود. افزون‌بر این، نتایج پژوهش امکان تحلیل بهتر تقابل میان امکان‌پذیری و بهینگی را در شرایط عدم‌قطعیت فراهم می‌سازد و به مدیران نشان می‌دهد که در چه شرایطی اتکا به برنامه‌ریزی قطعی می‌تواند از منظر اقتصادی شکننده و پرریسک باشد. بنابراین، این پژوهش علاوه بر توسعه مدل‌سازی ریاضی، بینش‌هایی کاربردی برای مدیریت عدم‌قطعیت، تخصیص ظرفیت و اولویت‌بندی بودجه در سیستم‌های تولیدی چندکارخانه‌ای ارائه می‌دهد.

مجموعه‌ها:

I	محصولات	$(1 \dots i \dots N)$
J	مراکز تولید (کارخانه‌ها)	$(1 \dots j \dots J)$
T	دوره‌های زمانی	$(1 \dots t \dots T)$
K	مراکز تولید (کارخانه‌ها)	$(1 \dots k \dots K)$
U	دوره‌های زمانی	$(1 \dots u \dots U)$

پارامترها:

S_{ij} هزینه ثابت برای تولید محصول i در مرکز j

C_{ij} هزینه تولید واحد کالای i در کارخانه j

e_{ij} هزینه واحد موجودی کالای i در کارخانه j

r_{jk} هزینه واحد حمل‌ونقل اقلام از کارخانه j به کارخانه k

d_{iku} تقاضای کالای i در کارخانه k در دوره u

b_{ij} زمان پردازش کالای i در کارخانه j

f_{ij} زمان راه‌اندازی برای آماده‌سازی دستگاه جهت تولید کالای i در کارخانه j

P_{jt} ظرفیت تولید کارخانه j در دوره t

α_j درصد معیوب در کارخانه j

β_j نسبت محصولات معیوب کارخانه j که قابل تعمیر هستند

γ_j نسبت محصولات معیوب کارخانه j که قابل تعمیر نیستند اما قابل‌فروش هستند

δ_j نسبت محصولات معیوب کارخانه j که تعمیر و فروش آنها غیرممکن است

I_{ij} قیمت فروش کالای i که قرار است در کارخانه j تولید شود

v_{ij} ارزش اسقاط به ازای هر قطعه معیوب i که قرار است در کارخانه j تولید شود

rc_{ij} هزینه تعمیر به ازای هر قطعه معیوب i که قرار است در کارخانه j تولید شود

متغیرهای تصمیم:

x_{ijtku} مقدار کالای i که باید در یک دوره-کارخانه (j, t) تولید شود تا تقاضای یک دوره-کارخانه (k,u) را برآورده کند

y_{ijt} برابر با ۱ است اگر کالای i در دوره-کارخانه (t ,j) تولید شود

TP_{ijt} کل مقدار کالای i که قرار است در یک دوره-کارخانه (t ,j) تولید شود

v_{ij} ارزش اسقاط به ازای هر قطعه معیوب i که قرار است در کارخانه j تولید شود

rc_{ij} هزینه تعمیر به ازای هر قطعه معیوب i که قرار است در کارخانه j تولید شود

تابع هدف و محدودیت‌ها:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a}\sum_{t=1}^{m}\sum_{u=1}^{a} \bar{C}_{ijtku}.x_{ijtku} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a} S_{ij}.y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a}\Big((v_{ij}-C_{ij}).(\gamma_j.\alpha_j)\Big).TP_{ijt} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a}\Big(rc_{ij}.(\beta_j.\alpha_j)\Big).TP_{ijt} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a}\Big(C_{ij}.(\delta_j.\alpha_j)\Big).TP_{ijt} \quad (۱)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a} x_{ijtku} = d_{iku} \qquad \forall(i,\ k,\ u) \quad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{f}_{ij}.y_{ijt} + \tilde{b}_{ij}.TP_{ijt}\right) \le P_{jt} \qquad \forall(j,\ t) \quad (۳)$$

$$x_{ijtku} \le d_{iku}.y_{ijt} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \quad (۴)$$

$$\frac{x_{ijtku}.\tilde{b}_{ij}}{(1-\alpha_j(1-\beta_j))}+\left(1-\alpha_j(1-\beta_j)\right).\tilde{f}_{ij}\le P_{jt} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \qquad (۵)$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{u=1}^{a}x_{ijtku}=\left\lfloor\left(۱-\left(\alpha_j.(۱-\beta_j)\right)\right)TP_{ijt}\right\rfloor \qquad \forall(i,\ j,\ t) \qquad (۶)$$

$$TP_{ijt},\ x_{ijtku}\in\mathbb{R} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \qquad (۷)$$

$$y_{ijt}\in\{0,1\} \qquad \forall(i,j,t) \qquad (۸)$$

$$\chi_{ijtku}=\min_{1\le v\le m}\left((u-t).e_{iv}+r_{jv}+r_{vk}\right) \qquad \forall(i,j,t,k,u) \qquad (۹)$$

$$\bar{C}_{ijtku}=\begin{cases}0, & if\ u<t,\\ I_{ij}-\left(C_{ij}+\chi_{ijtku}\right) & otherwise\end{cases} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \qquad (۱۰)$$

تابع هدف در معادله (۱) با در نظر گرفتن درآمدها، هزینه‌های تولید، هزینه‌های موجودی، هزینه‌های حمل‌ونقل، هزینه‌های ضایعات و هزینه‌های حمل‌ونقل و همچنین هزینه‌های ثابت و متغیر و همکاری مراکز، به دنبال حداکثر رساندن سود کلی است و با محاسبه درآمد و هزینه‌ها سود را محاسبه می‌کند. محدودیت تأمین تقاضا (۲) به‌عنوان سنگ بنای مدل عمل می‌کند و تضمین می‌نماید که تمامی تقاضاهای هر محصول در هر کارخانه و دوره زمانی باید به‌طور کامل توسط تولیدات کارخانه‌های مختلف در دوره‌های زمانی متناظر تأمین گردد. محدودیت ظرفیت تولید (۳) به‌عنوان یکی از حیاتی‌ترین محدودیت‌های مدل، این معادله دو مؤلفه کلیدی زمان راه‌اندازی خط تولید که یک هزینه ثابت محسوب می‌شود و زمان عملیات تولید واقعی که متناسب با حجم تولید است را کنترل می‌نماید و با عدم قطعیت روبه‌رو هستند.

محدودیت‌های تخصیص تولید (۴-۵) هوشمندانه با در نظر گرفتن سه عامل کلیدی سطح تقاضای واقعی، ظرفیت تولید خالص پس از کسر محصولات معیوب و وضعیت فعال بودن خط تولید باعث تولید با ملاحظات فنی و اقتصادی می‌شود. محدودیت تعادل تولید (۶) نقش حیاتی در ایجاد تعادل بین تولید ناخالص و تولید مؤثر ایفا می‌نماید. با در نظر گرفتن نرخ محصولات معیوب غیرقابل تعمیر، تضمین می‌کند که مقدار تولید قابل‌عرضه به بازار دقیقاً متناسب با ظرفیت واقعی سیستم پس از کسر ضایعات است.

مدل با معرفی دو تابع کمکی، واقع‌گرایی را افزایش می‌دهد (۹-۱۰) که کمینه هزینه حمل‌ونقل بین کارخانه‌ای را محاسبه می‌نماید و به‌نوعی هزینه متناسب با هر متغیر را محاسبه می‌نماید و به‌صورت هوشمندانه در مورد تولید برای دوره‌های گذشته مقدار صفر را اختصاص می‌دهد برای دوره‌های جاری و آینده، سود خالص را پس از کسر هزینه‌های تولید و حمل‌ونقل محاسبه می‌نماید. این رویکرد جامع، مدل را به ابزاری قدرتمند برای تصمیم‌گیری در محیط‌های تولیدی پیچیده تبدیل می‌کند.

۴- مثال عددی

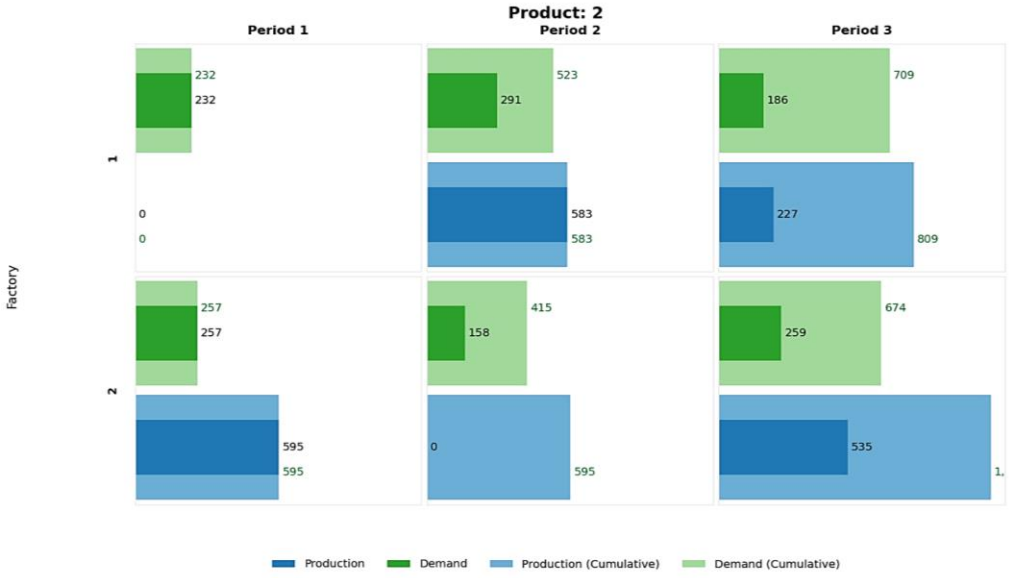
به‌منظور ارزیابی عملکرد مدل بهینه‌سازی پیشنهادی و تحلیل رفتار آن تحت شرایط عدم قطعیت، یک مثال عددی طراحی شده است. داده‌های مورداستفاده در این مثال، به‌صورت مصنوعی و در بازه‌هایی تولیدشده‌اند که از یک مقاله معتبر در ادبیات موضوع اقتباس‌شده و شرایط واقعی یک زنجیره تأمین چندمحصوله و چنددوره‌ای با در نظر گرفتن اقلام معیوب را شبیه‌سازی می‌کنند.

برای تولید این داده‌ها، از توزیع یکنواخت در بازه‌های معقول و واقع‌گرایانه استفاده شده است تا نوسانات و عدم قطعیت‌های موجود در محیط‌های عملیاتی زنجیره تأمین به‌درستی مدل‌سازی شوند. این پارامترها شامل هزینه‌ها، زمان‌ها و ظرفیت‌های مربوط به تولید، راه‌اندازی، موجودی، حمل‌ونقل و فرآیند تعمیر اقلام معیوب هستند. به‌طور خلاصه، نحوه تولید پارامترها به شرح زیر است:

- تمامی مجموعه‌ها برابر ۵ در نظر گرفته شده است
- احتمال برقراری محدودیت‌ها برابر ۰.۸ در نظر گرفته شده است $(\alpha = 0.2)$
- هزینه راه‌اندازی: به‌صورت تصادفی از بازه ۴۵۰۰ تا ۵۵۰۰ واحد انتخاب شده‌اند.
- هزینه تولید هر واحد محصول: در بازه ۱.۵ تا ۲.۵ واحد تولید شده‌اند.
- هزینه نگهداری موجودی: در بازه ۰.۲ تا ۰.۴ واحد تعیین شده‌اند.
- هزینه حمل‌ونقل: در بازه ۰.۲ تا ۰.۴ واحد در نظر گرفته شده‌اند.
- مقدار تقاضا: در بازه ۰ تا ۱۸۰ واحد برای هر ترکیب از مشتری، دوره زمانی و محصول تولید شده‌اند.
- زمان پردازش: از تابع توزیع نرمال با میانگین ۳ و انحراف معیار ۱ پیروی می‌کند.
- زمان راه‌اندازی: از تابع توزیع نرمال با میانگین ۲۰۰ و انحراف معیار ۲۵ پیروی می‌کند.
- ظرفیت تولیدی کارخانه‌ها: در بازه‌ای بین ۹۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ واحد در هر دوره زمانی در نظر گرفته شده‌اند.
- نسبت اقلام معیوب قابل تعمیر، نیمه‌قابل بازیافت و کاملاً غیرقابل استفاده: در بازه ۰.۰۶ تا ۰.۰۸۵، در بازه ۰.۰۶ تا ۰.۰۸، در بازه ۰.۰۰۰۲ تا ۰.۰۳ در نظر گرفته شده‌اند.
- قیمت فروش هر واحد محصول: در بازه ۳۰۰ تا ۵۰۰ واحد انتخاب شده‌اند.
- ارزش بازیافتی اقلام معیوب: در بازه ۱۰۰ تا ۲۰۰ واحد در نظر گرفته شده‌اند.
- هزینه تعمیر اقلام معیوب: بین ۳۰ تا ۵۰ واحد در نظر گرفته شده‌اند.

داده‌های فوق، مجموعه‌ای متعادل و واقع‌گرایانه از ویژگی‌های عملیاتی را منعکس می‌کنند و با در نظر گرفتن منابع مختلف عدم قطعیت از جمله زمان راه‌اندازی و زمان پردازش، امکان تحلیل حساسیت مدل و بررسی اثربخشی رویکرد را فراهم می‌سازند. این مثال عددی به‌عنوان مبنایی برای تحلیل مقایسه‌ای و بررسی عملکرد مدل در سناریوهای گوناگون مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

مدل با استفاده از داده‌های عددی تولیدشده و با بهره‌گیری از حل‌کننده CPLEX اجرا شد. شکل ۱ نمودار خلاصه‌ای از مشخصات و خروجی‌های یک محصول را از مثال نمایش می‌دهد که مدل تنها برای دو کارخانه و ۳ دوره برنامه‌ریزی کرده است.



شکل ۱ برنامه‌ریزی برون‌سپاری یک محصول بین دو کارخانه در سه دوره

نمودار، محصول‌محور به‌صورت یک شبکه از سلول‌ها ارائه شده است که در آن سطرها کارخانه‌ها و ستون‌ها دوره‌های زمانی‌اند. در هر سلول دو نوار افقی دیده می‌شود: ردیف سبز برای تولید و ردیف آبی برای تقاضا. هر ردیف خود از دو لایه تشکیل‌شده است: یک میله باریک آبی‌رنگ که مقدار دوره‌ای همان دوره را نشان می‌دهد و یک میله پهنِ پشتی که مقدار تجمعی تا پایان

همان دوره را بازنمایی می‌کند. مقیاس افقی در تمام سلول‌های یک شکل مشترک است تا مقایسه بصری معتبر باقی بماند.

خواندن شکل از سه بُعد انجام می‌شود. درون هر سلول، مقایسه طول میله‌های دوره‌ای تولید و تقاضا تصویر روشنی از مازاد یا کمبود همان دوره می‌دهد و مقایسه میله‌های تجمعی وضعیت انباشته پوشش یا عقب‌ماندگی تا همان مقطع زمانی را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که این عقب‌ماندگی توسط دیگر مراکز رفع و تأمین خواهد شد. در امتداد یک ستون، توزیع طول میله‌ها میان سطرها بیانگر سهم نسبی کارخانه‌ها از بار تولید/تقاضا در آن دوره و میزان تمرکز یا پراکندگی بار در شبکه است. در امتداد یک سطر، تغییراتِ پی‌درپیِ میله‌های دوره‌ای الگوی نوسان زمانی یک کارخانه را ترسیم می‌کند و رشد تدریجی میله‌های تجمعی، مسیر انباشته تولید و تقاضا را در طول افق زمانی نمایش می‌دهد.

برای جمع‌بندی سریع، نگاه به آخرین ستون هر شکل وضعیت نهاییِ پوشش تقاضا را برای تک‌تک کارخانه‌ها نشان می‌دهد و مقایسه سطرها در همین ستون، تصویری از توازن یا عدم توازن کلی شبکه در پایان افق ارائه می‌کند. ازآنجاکه برای هر محصول یک شکل مستقل ساخته می‌شود، کنار هم گذاشتن این شکل‌ها بدون اتکا به اعداد، امکان مقایسه الگوهای زمانی–مکانی، شناسایی گلوگاه‌های محتمل و قضاوت درباره اتکا یا حساسیت هر محصول به برخی کارخانه‌ها را فراهم می‌آورد. به‌این‌ترتیب، مجموعه نمودارها ابزاری منسجم برای ارزیابی شهودی وضعیت دوره‌ای و تجمعی، هم به‌صورت موضعی در سطح هر سلول و هم به‌صورت سیستمی در سطح کل شبکه است.

۵- روش حل و نحوه برخورد با عدم قطعیت

در مسائل واقعی برنامه‌ریزی تولید چندکارخانه‌ای، عدم قطعیت در پارامترهای کلیدی مانند زمان تولید و زمان راه‌اندازی (setup time)، می‌تواند منجر به برنامه‌ریزی نادرست و زیان اقتصادی قابل‌توجهی شود. بنابراین، برای مقابله مؤثر با این عدم قطعیت‌ها، استفاده از رویکردهای بهینه‌سازی احتمالی که بتوانند شرایط نامطمئن را به‌خوبی مدیریت کنند، ضروری است. به‌منظور پوشش این ضعف و افزایش دقت در مدیریت عدم قطعیت‌ها، در این پژوهش رویکرد CCP در نظر گرفته‌شده است. یکی از مهم‌ترین معیارهای انتخاب برخورد با عدم قطعیت حجم اطلاعات و داده‌های موجود است. در این راستا، رویکرد برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی با بهره‌گیری از توزیع‌های احتمالی استخراج‌شده از داده‌های تاریخی، این امکان را فراهم می‌سازد تا محدودیت‌های مدل نه به‌صورت قطعی، بلکه با یک سطح اطمینان مشخص ارضا شوند. با توجه به داده‌های تولیدی در این صنعت مدل به تصمیم‌گیرنده اجازه می‌دهد تا با تحلیل دقیق رفتار و توزیع داده‌ها، توازنی بهینه میان سطح ریسک‌پذیری و کارایی سیستم برقرار کرده و از رویکردهای بیش‌ازحد محافظه‌کارانه (مانند بهینه‌سازی استوار کلاسیک) که منجر به افزایش بی‌رویه هزینه‌ها می‌شوند، اجتناب نماید.

در انتخاب رویکرد مواجهه با عدم‌قطعیت، همواره یک تقابل میان محافظه‌کاری و کارایی وجود دارد. رویکردهای نوین بهینه‌سازی استوار اگرچه نیاز به فرض توزیع احتمال ندارند، اما به دلیل تمرکز بر بدترین سناریوی ممکن، غالباً منجر به جواب‌هایی می‌شوند که از نظر اقتصادی برای بنگاه‌های تولیدی بیش‌ازحد گران و غیربهینه هستند. در پژوهش حاضر، با فرض وجود بسترهای ثبت داده و دسترسی به اطلاعات آماری معتبر در صنایع تولیدی مدرن، از رویکرد برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی استفاده شده است. این رویکرد به مدل اجازه می‌دهد تا با استفاده از دانشِ حاصل از توزیع داده‌ها، سطح ریسک‌پذیری را به‌صورت هوشمندانه تنظیم کرده و برخلاف مدل‌های استوار، از کاهش بی‌رویه سود در قبال پوشش سناریوهای بسیار نادر اجتناب ورزد. بدین ترتیب، جایگاه این پژوهش در میان رویکردهای نوین، تمرکز بر بهینه‌سازی مبتنی بر شواهد آماری جهت دستیابی به پایداریِ اقتصادی است.

با توجه به مدل ارائه‌شده محدودیت (۳) به شکل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$pr\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{f}_{ij}.y_{ijt}+\tilde{b}_{ij}.TP_{ijt}\right)\le P_{jt}\right\}\ge 1-\omega \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۱\text{-}۱)$$

$$\tilde{f}_{ij}=\ \mu_{ij}^{f}+\sigma_{ij}^{f}.Z_{ij}^{f} \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۱\text{-}۲)$$

$$\tilde{b}_{ij}=\ \mu_{ij}^{b}+\sigma_{ij}^{b}.Z_{ij}^{b} \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۱\text{-}۳)$$

$$Z_{ij}^{f}, Z_{ij}^{b} \sim N(0,1) \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۱-۴)$$

$$X_{jt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_{ij}.y_{ijt} + \tilde{b}_{ij}.TP_{ijt} \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۲-۱)$$

$$X_{jt} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\mu_{ij}^{f} + \sigma_{ij}^{f}.Z_{ij}^{f}\right).y_{ijt} + \left(\mu_{ij}^{b} + \sigma_{ij}^{b}.Z_{ij}^{b}\right).TP_{ijt}\right] \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۲-۲)$$

$$X_{jt} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{f}.y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{b}.TP_{ijt} + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}^{f}.Z_{ij}^{f}.y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}^{b}.Z_{ij}^{b}.TP_{ijt} \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۲-۳)$$

$$E[X_{jt}] = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{f}.y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{b}.TP_{ijt} \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۳-۱)$$

$$Var[X_{jt}] = \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_{ij}^{f}.y_{ijt}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_{ij}^{b}.TP_{ijt}\right)^2 \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۳-۲)$$

$$X_{jt} \sim N(\mu_{jt}(y,TP), \sigma_{jt}^{2}(y,TP)) \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۴-۱)$$

$$\mu_{jt} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{f}.y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{b}.TP_{ijt} \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۴-۲)$$

$$\sigma_{jt} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_{ij}^{f}.y_{ijt}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_{ij}^{b}.TP_{ijt}\right)^2} \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۴-۳)$$

$$pr\{X_{jt} \le P_{jt}\} \ge 1 - \alpha \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۵-۱)$$

$$E[X_{jt}] + Z_{1-\alpha}.\sigma_{jt}^{2}(y,TP) \le P_{jt} \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۵-۲)$$

$$Z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

به‌منظور تبدیل محدودیت احتمالی (۱-۱۵) به یک معادل قطعی قابل‌حل، ابتدا باید پارامترهای آماری متغیر تصادفی تعیین گردند. با فرض استقلال متغیرهای تصادفی، میانگین و واریانس کل سیستم بر اساس روابط (۱-۱۳) و (۲-۱۳) محاسبه می‌شوند. سپس با فرض پیروی توزیع تجمعی از توزیع نرمال، متغیر تصادفی نرمال استاندارد به‌صورت رابطه (۱-۱۴) تعریف می‌گردد.

در نهایت، با جایگذاری مقدار میانگین از رابطه (۲-۱۴) و انحراف معیار از رابطه (۳-۱۴) در ساختار استانداردِ محدودیت شانسی (رابطه ۲-۱۵)، معادل قطعیِ نهایی به‌صورت رابطه (۱۶) استخراج می‌گردد:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{f}.y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}^{b}.TP_{ijt} + Z_{1-\alpha}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_{ij}^{f}.y_{ijt}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_{ij}^{b}.TP_{ijt}\right)^2} \le P_{jt} \qquad \forall(j,\ t) \qquad (۱۶)$$

با توجه به ساختار مدل برنامه‌ریزی با محدودیت‌های شانسی که در بخش پیشین تشریح شد، محدودیت (۳) به دلیل وجود جملات رادیکالیِ حاصل از انحراف معیارِ متغیرهای تصادفی، به‌صورت غیرخطی تعریف می‌شود (رابطه ۱۶). ماهیت غیرخطی این محدودیت‌ها، پیچیدگی محاسباتی مدل را به‌شدت افزایش داده و منجر به‌دشواری در تضمین بهینگی سراسری می‌گردد. در این رابطه، دو عبارت اول بیانگر امید ریاضی کلِ بارِ کاری تحمیل‌شده به سیستم و عبارت رادیکالی بیانگر حاشیه اطمینان برای پوشش نوسانات و عدم قطعیت‌ها در سطح اطمینان α-۱ است.

به‌منظور رفع این چالش و با هدف دستیابی به یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح که قابلیت حل در ابعاد بزرگِ صنعتی را داشته باشد، از روش تقریبِ نامساوی‌های مثلثی (رابطه ۱۷ الی ۱۹) بهره گرفته شده است. این رویکرد ضمن حفظ دقت مدل در کنترل ریسک، امکان خطی‌سازی جملات درجه دوم را فراهم می‌سازد.

اثبات:

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB \quad (۱۷)$$

$$(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB \quad (۱۸)$$

$$|A-B| \le \sqrt{A^2+B^2} \le |A+B| \quad (۱۹)$$

$$Z \le Y \; AND \; X+Y \le C \Rightarrow X+Z \le C \quad (۲۰)$$

به کمک روابط (۱۷-۱۹) می‌توان نتیجه (۱۹) را نتیجه گرفت و با جایگذاری دو عبارت $\sum_{i=1}^{n}(\sigma_{ij}^{b}.TP_{ijt})^2$ و $\sum_{i=1}^{n}(\sigma_{ij}^{f}.y_{ijt})^2$ این امکان فراهم می‌گردد تا رابطه (۱۶) به شکل زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}^{f}.y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}^{b}.TP_{ijt} + Z_{1-\alpha}.\left|\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}^{f}.y_{ijt} - \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}^{b}.TP_{ijt}\right| \le P_{jt} \qquad \forall(j,t) \quad (۲۱)$$

در این مرحله نیز برای حذف قدرمطلق از مدل و رابطه شماره (۲۱)، از متغیر کمکی و در نهایت روابط زیر استفاده شده است:

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}^{f}.y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}^{b}.TP_{ijt} + Z_{1-\alpha}.\tau_{jt} \le P_{jt} \qquad \forall(j,t) \quad (۲۲)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}^{f}.y_{ijt} - \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}^{b}.TP_{ijt} \le \tau_{jt} \qquad \forall(j,t) \quad (۲۳)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}^{b}.TP_{ijt} - \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}^{f}.y_{ijt} \le \tau_{jt} \qquad \forall(j,t) \quad (۲۴)$$

$$\tau_{jt} \ge 0 \qquad \forall(j,t) \quad (۲۵)$$

در ادامه با توجه به استفاده از دو پارامتر دارای عدم قطعیت در رابطه شماره (۵) و به‌منظور اعمال عدم قطعیت به طریق مشابه در رابطه شماره (۳)، محدودیت زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{x_{ijtku}.\mu_{ij}^{b}}{(1-\alpha_j(1-\beta_j))} + \left(1-\alpha_j(1-\beta_j)\right).\mu_{ij}^{f} + Z_{1-\alpha}.\sqrt{\left(\frac{x_{ijtku}.\sigma_{ij}^{b}}{\left(1-\alpha_j(1-\beta_j)\right)}\right)^2 + \left(\left(1-\alpha_j(1-\beta_j)\right)\sigma_{ij}^{f}\right)^2} \le P_{jt} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \quad (۲۶)$$

با توجه به رابطه (۲۰) و به جهت خطی سازی رابطه (۲۶) به روش حدی از روابط زیر به‌عنوان جایگزین محدودیت (۵) استفاده می‌شود:

$$\frac{x_{ijtku}.\mu_{ij}^{b}}{(1-\alpha_j(1-\beta_j))} + \left(1-\alpha_j(1-\beta_j)\right).\mu_{ij}^{f} + Z_{1-\alpha}.\theta_{ijtku} \le P_{jt} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \quad (۲۷)$$

$$\left(\frac{x_{ijtku}.\sigma_{ij}^{b}}{\left(1-\alpha_j(1-\beta_j)\right)}\right) - \left(\left(1-\alpha_j(1-\beta_j)\right)\sigma_{ij}^{f}\right) \le \theta_{ijtku} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \quad (۲۸)$$

$$\left(\left(1-\alpha_j(1-\beta_j)\right)\sigma_{ij}^{f}\right) - \left(\frac{x_{ijtku}.\sigma_{ij}^{b}}{\left(1-\alpha_j(1-\beta_j)\right)}\right) \le \theta_{ijtku} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \quad (۲۹)$$

$$\theta_{ijtku} \ge 0 \qquad \forall(i,j,t,k,u) \quad (۳۰)$$

۶- نتایج عددی

برای ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی در مواجهه با عدم قطعیت‌های دنیای واقعی، از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده‌شده

است. این روش به‌عنوان یکی از ابزارهای قدرتمند در تحلیل ریسک و اعتبارسنجی تصمیم‌گیری تحت عدم قطعیت، امکان بررسی پایداری نتایج مدل را از طریق اجرای چندباره آن در شرایط مختلف تصادفی فراهم می‌کند. در این مطالعه، ۵۰ سناریوی مستقل با استفاده از توزیع نرمال فرض شده برای پارامترهای دارای عدم قطعیت (از جمله زمان راه‌اندازی و زمان تولید) تولید شده‌اند. برای هر سناریو، خروجی دو مدل مختلف شامل مدل قطعی و مدل تصادفی (CCP) محاسبه و مقایسه شده‌اند. در جدول زیر جواب اولیه و مقایسه میان دو مدل نمایش داده شده است.

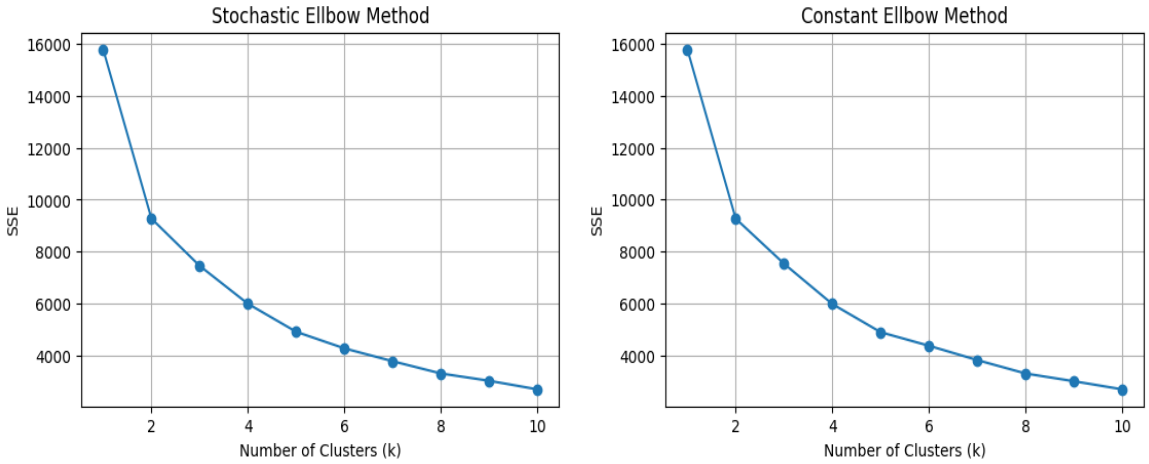
جدول ۲ مقایسه میان مدل قطعی و تصادفی

نوع مدل	تابع هدف (Objective)	تعداد متغیر	تعداد محدودیت	زمان حل (ثانیه)	وضعیت خاتمه
مدل قطعی	۴۳۸۰۰۸۶	۲۱۲۵	۶۵۲۵	۰.۱۰	Optimal
مدل تصادفی (CCP)	۴۳۵۵۶۹۶	۵۲۷۵	۱۲۸۲۵	۰.۳۴	Optimal

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مدل قطعی که هیچ‌گونه عدم قطعیتی را در نظر نمی‌گیرد، مقدار تابع هدف بیشتری را به‌دست آورده است. این نتیجه البته طبیعی است، چراکه در نبود عدم قطعیت، مدل بهینه‌ترین حالت خوش‌بینانه را دنبال می‌کند. بااین‌حال، این راه‌حل ممکن است در شرایط واقعی و پرنوسان منجر به عدم تحقق و افت عملکرد شود.

در مقابل، مدل غیرقطعی مقدار تابع هدف پایین‌تری را نسبت به مدل قطعی ارائه داده است. این کاهش به دلیل در نظر گرفتن انحرافات ممکن در پارامترهایی مانند زمان راه‌اندازی و زمان تولید بوده است. با این تفکیک، مدل به‌صورت واقع‌بینانه‌تری با عدم قطعیت مواجه شده و توزیع اثر آن میان مؤلفه‌های مختلف انجام‌گرفته است. این موضوع مانع از خوش‌بینی مفرط و تصمیم‌گیری‌های ریسک‌پذیر در محیط‌های عملیاتی می‌شود. لازم به ذکر است به‌منظور صحت سنجی مدل با تغییر پارامتر ω در شرایطی که احتمال برقراری محدودیت کمتر از ۰.۵ باشد تابع هدف تا ۱۳٪ افزایش و در شرایطی که احتمال برقراری محدودیت‌ها به بیش از ۰.۵ رسانده شود ۲٪ کاهش در تابع هدف اتفاق افتاده است.

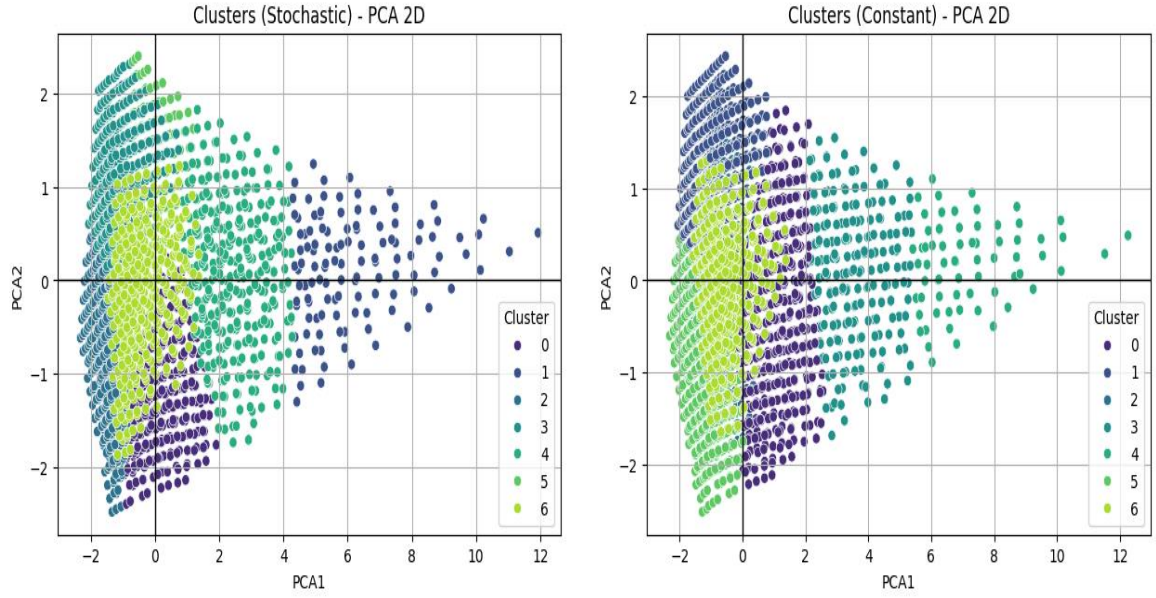
نکته حائز اهمیت در پیچیدگی محاسباتی مدل‌ها است. مدل دارای عدم قطعیت، دارای تعداد بیشتری از متغیرها و محدودیت‌ها نسبت به مدل قطعی است. این افزایش پیچیدگی به دلیل اعمال قیود خطی سازی و در نظر گرفتن پارامترهای غیرقطعی برای هر گروه از پارامترهای نامطمئن است و خود نشان‌دهنده بار محاسباتی افزوده در مواجهه با عدم قطعیت است. به‌منظور بررسی این مهم تعداد ۲۷۴۴ مسئله حل شد. این مسائل با هدف تحلیل حساسیت بر روی تعداد مجموعه‌ها صورت گرفت. تمامی مجموعه در بازه ۲ تا ۱۵ تعریف و مسائل مربوطه حل شدند. پس از حل مسائل نتایج به‌دست‌آمده ذخیره و برای تحلیل آماده شدند. در هر تکرار از حل مسئله تعداد متغیرها، زمان حل، تعداد محدودیت، تعداد مجموعه‌ها و حد بالا و پایین مسئله ذخیره شد. در بازه تعریف شده تمامی مسائل حل شده و جواب دقیق برای آنان به دست آمد.



شکل ۲ روش Ellbow برای تعیین تعداد خوشه

به جهت تحلیل مسائل از خوشه‌بندی K-Means استفاده شده است. در ابتدای امر به روش Ellbow (شکل ۲) تعداد خوشه مناسب برای مسائل قطعی و احتمالی به دست آمد. با توجه به افت شاخص مجموع فاصله‌های مربع‌شده نقاط تا مرکز خوشه عدد ۷ برای تعداد خوشه در نظر گفته شد.

پس از خوشه‌بندی به تعداد ۷ خوشه جهت نمایش خوشه‌بندی از روش PCA برای کاهش ابعاد استفاده شد (شکل ۳). لازم به ذکر است رنگ‌های به کار گرفته‌شده نشان از یک خوشه بودن مجموعه ندارد و ارتباطی میان خوشه‌های مدل قطعی و احتمالی وجود ندارد.

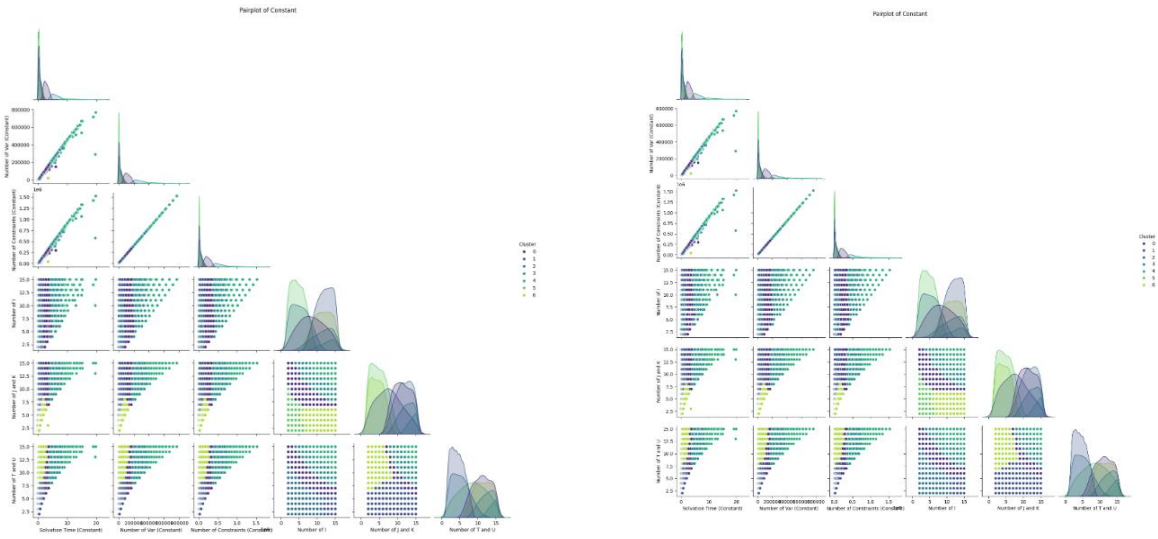


شکل ۳ نمودار پراکندگی خوشه‌ها

در هر دو حالت قطعی و احتمالی، بین «تعداد متغیرها» و «تعداد قیود» یک رابطه خطی بسیار قوی دیده می‌شود (شکل ۳) که نشان می‌دهد این دو ویژگی تقریباً هم‌مقیاس رشد می‌کنند و بخش بزرگی از واریانس داده را توضیح می‌دهند. این هم‌خطی بالا بیانگر آن است که مسئله‌ها با افزایش اندازه، هم‌زمان از نظر متغیر و قید پیچیده‌تر می‌شوند و این دو ویژگی نقش کلیدی در شکل‌گیری خوشه‌ها دارند.

توزیع زمان حل در هر دو حالت به‌شدت چوله به راست است، اما در داده‌های مدل احتمالی پراکندگی و دُم توزیع بزرگ‌تر است. این موضوع نشان می‌دهد که حالت احتمالی حساسیت بیشتری به افزایش اندازه مسئله دارد و برخی خوشه‌ها با زمان‌های حل به‌مراتب بالاتر ظاهر می‌شوند، درحالی‌که در مدل قطعی زمان حل متمرکزتر و پایدارتر است.

مجموعه‌ها (مانند تعداد I، J&K و T&U) الگوهای پله‌ای و لایه‌لایه ایجاد کرده‌اند و به‌وضوح خوشه‌ها را از هم تفکیک می‌کنند. در هر دو نمودار مشاهده می‌شود که برخی خوشه‌ها در بازه‌های خاصی از این متغیرها متمرکز شده‌اند، که نشان می‌دهد این پارامترهای ساختاری نقش مهمی در تعیین نوع و پیچیدگی مسئله و در نتیجه خوشه‌بندی دارند.



شکل ۴ نمودار جفت ویژگی‌ها در خوشه‌ها

در مقایسه نهایی، خوشه‌های مدل احتمالی هم‌پوشانی بیشتری در توزیع‌ها دارند، به‌ویژه در زمان حل، که بیانگر ناپایداری و تنوع بالاتر این حالت است. در مقابل، خوشه‌های مدل قطعی تفکیک‌پذیرتر و ساختاریافته‌تر به نظر می‌رسند. این تفاوت نشان می‌دهد که ماهیت تصادفی باعث افزایش واریانس در رفتار مسئله شده و خوشه‌بندی را پیچیده‌تر اما از نظر تحلیلی غنی‌تر کرده است.

جدول ۲ میانگین نتایج عددی هر خوشه در مدل قطعی

Mean Number of T and U	Mean Number of J and K	Mean Number of I	Mean Number of Constraints	Mean Number of Var	Mean Solvation Time	Cluster
11.1416122	11.27015251	8.492374728	232346.9913	117078.0937	2.814316833	0
4.373605948	7.711895911	11.99628253	38652.87546	19720.71375	0.60498091	1
5.211136891	11.76798144	5.364269142	45730.18329	23149.58469	0.728026149	2
12.46046512	12.43255814	11.40930233	516818.4512	260021.693	5.888255615	3
13.92647059	13.92647059	12.77941176	958904.8235	481813.4118	11.17691922	4
8.551851852	4.874074074	4.692592593	22516.87963	11427.6537	0.434070827	5
11.52894737	4.439473684	11.47105263	70326.70789	35716.63684	0.970699317	6

جدول ۳ انحراف معیار نتایج عددی هر خوشه در مدل قطعی

std Number of T and U	std Number of J and K	std Number of I	std Number of Constraints	std Number of Var	std Solvation Time	Cluster
2.49794466	2.320640764	3.48694487	71740.2797	36082.61026	0.798511346	0
1.780248139	3.479748237	2.157656052	41931.11763	21213.88369	0.479237178	1
2.381023106	2.186000991	2.386887506	37807.86178	19057.30376	0.446462589	2
1.94000428	1.929568366	2.753062352	106458.0084	53407.38538	1.205604006	3
1.110548829	1.110548829	1.8992975	184114.0835	92358.33677	2.630633396	4
3.607235603	2.109892345	1.942098004	25176.87606	12696.30452	0.323450224	5
2.29642465	1.764205738	2.388782922	54831.1676	27666.90222	0.605531027	6

جدول ۴ میانگین نتایج عددی هر خوشه در مدل احتمالی

Mean Number of T and U	Mean Number of J and K	Mean Number of I	Mean Number of Constraints	Mean Number of Var	Mean Solvation Time	Cluster
11.65329513	10.32091691	4.70487106	261855.1576	131405.9312	0.859462644	0
13.60504202	13.60504202	12.29411765	1666360.185	835331.0084	4.424767122	1
7.01026694	4.864476386	4.681724846	25078.09446	12670.66119	0.189672189	2
4.829493088	6	12.1797235	58544.26959	29616.02535	0.285275921	3
11.54901961	11.85714286	10.83473389	750915.8151	376786.9244	2.041182035	4
4.644171779	12.28834356	8.057259714	123490.0613	62175.97137	0.47356036	5
11.98989899	4.79040404	11.11111111	166230.3712	83714.58333	0.568858011	6

جدول ۵ انحراف معیار نتایج عددی هر خوشه در مدل قطعی

std Number of T and U	std Number of J and K	std Number of I	std Number of Constraints (Stochastic)	std Number of Var (Stochastic)	std Solvation Time (Stochastic)	Cluster
2.15028	2.565273	1.998995	134341.5	67353.06	0.347238663	0
1.329065	1.329065	2.304575	401892.2	201285.3	1.090472638	1
3.266915	2.155028	1.943475	26747.5	13460.48	0.128241192	2
1.982244	2.622518	2.058039	70489.11	35467.74	0.210739165	3
2.326202	2.173457	2.900624	205039	102710.8	0.607919169	4
1.855478	1.900358	3.464219	108756.6	54632.75	0.280477074	5
1.988549	1.985774	2.586778	127147.1	63846.8	0.319781087	6

مدلی که برای شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده‌شده، نسخه‌ای از مدل پایه برنامه‌ریزی تولید-توزیع است که در آن پارامترهای دارای نوسان به‌صورت مستقیم از مقادیر شبیه‌سازی‌شده در هر تکرار استفاده می‌شوند. این مدل در معادلات (۳۱) تا (۳۴) نشان داده شده است و هدف آن بیشینه‌سازی سود خالص زنجیره تأمین است که از مجموع درآمد حاصل از فروش محصولات سالم و بازیافت‌شده، منهای هزینه‌های تولید، راه‌اندازی، تعمیر، دفع و هزینه ناشی از کاهش ظرفیت، تشکیل شده است.

در تابع هدف (رابطه ۳۱)، پنج جزء اصلی حضور دارند، نخست، درآمد حاصل از فروش محصولات با نرخ فروش در متغیر تصمیم

محاسبه شده است. سپس هزینه‌های راه‌اندازی که وابسته به تصمیم تولید در هر دوره است، از کل سود کسر شده‌اند.

در ادامه، درآمد ناشی از فروش اقلام معیوب اما قابل‌فروش و هزینه‌های ناشی از تعمیر یا از دست‌رفتن کامل اقلام معیوب، با استفاده از نسبت‌های خرابی و اقلام معیوب لحاظ شده‌اند که ماهیت کیفی خروجی‌های کارخانه‌ها را بازتاب می‌دهند.

در نهایت، عبارت $\pi\cdot(w^{(1)}+w^{(2)})$ به‌عنوان جریمه استفاده از ظرفیت بیش‌ازحد معمول در مدل وارد شده است.

محدودیت (۳۲-۳۳) نیز بیان‌گر محدودیت ظرفیت تولیدی کارخانه‌ها است که ترکیبی از زمان راه‌اندازی و زمان تولید (با استفاده از متغیر میزان تولید را در برابر ظرفیت تولید کنترل می‌کند. متغیر $w^{(1)}, w^{(2)}$ نمایانگر میزان ظرفیت اضافه‌استفاده‌شده است که در تابع هدف مشمول جریمه می‌شود. محدودیت (۳۴) نیز به حوزه تعریف متغیرها اشاره دارد و مشخص می‌سازد که متغیرهای تصمیم در هر سناریو می‌توانند از یکی از دو مدل پایه (مدل قطعی یا مدل تصادفی) حاصل شوند.

ساختار این مدل به‌گونه‌ای طراحی شده که بتواند در هر تکرار از شبیه‌سازی، مقادیر متفاوتی از پارامترهای را بپذیرد و واکنش مدل به این تغییرات را در مقادیر تابع هدف، ساختار تولید، تخصیص منابع و استفاده از ظرفیت، ثبت کند. ازآنجاکه مدل برنامه‌ریزی ترکیبی صحیح (MIP) محسوب می‌شود، پیچیدگی حل مدل با تغییرات پارامترها نیز می‌تواند بر نتایج و زمان حل تأثیرگذار باشد. به همین دلیل، تحلیل دقیق رفتار مدل در مواجهه با داده‌های متغیر، از نظر علمی و کاربردی، ضروری است.

$$\begin{aligned}\text{Max} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a}\sum_{t=1}^{m}\sum_{u=1}^{a}\bar{C}_{ijtku}.x_{ijtku} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a}S_{ij}.y_{ijt} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a}\Big((v_{ij}-C_{ij}).(\gamma_j.\alpha_j)\Big).TP_{ijt} \\ - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a}\Big(rc_{ij}.(\beta_j.\alpha_j)\Big).TP_{ijt} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{a}\Big(C_{ij}.(\delta_j.\alpha_j)\Big).TP_{ijt} \\ - \pi.(w^{(1)}+w^{(2)})\end{aligned} \quad (۳۱)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\big(f_{ij}.y_{ijt}+b_{ij}.TP_{ijt}\big) - w^{1} \le P_{jt} \quad (۳۲)$$

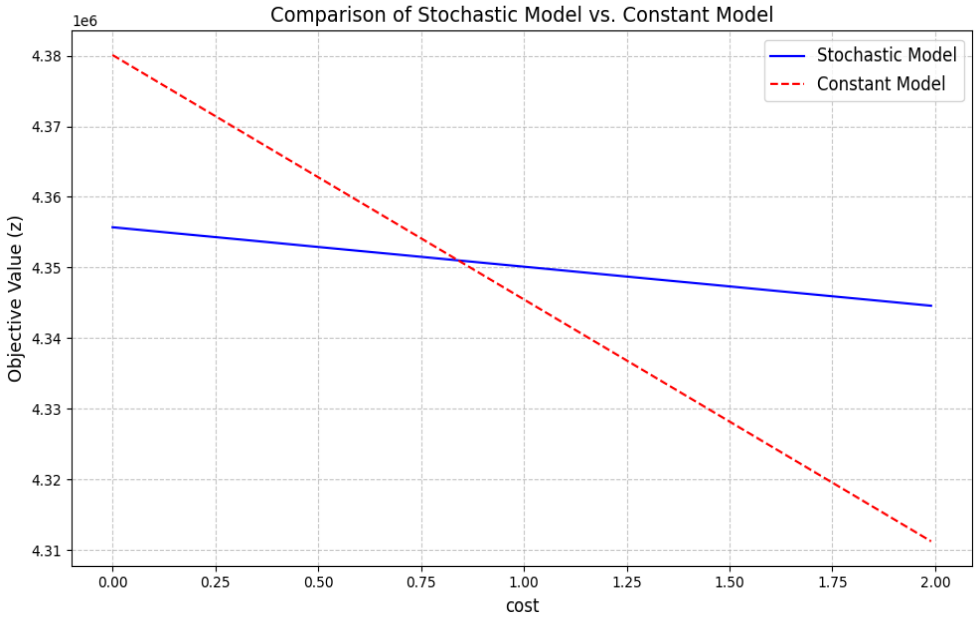
$$\frac{x_{ijtku}.b_{ij}}{(1-\alpha_j(1-\beta_j))} + \Big(1-\alpha_j(1-\beta_j)\Big).f_{ij} - w^{(2)} \le P_{jt} \quad (۳۳)$$

$$TP_{ijt},\ x_{ijtku}, y_{ijt} \in \{z^{constant}\ or\ z^{robust}\}, w \ge 0 \quad (۳۴)$$

شبیه‌سازی مونت‌کارلو با تولید ۵۰ سناریوی مستقل از مقادیر تصادفی f و b انجام گرفت. در هر سناریو، مدل قطعی و مدل

تصادفی (CCP) اجرا شده و مقدار تابع هدف ثبت گردید. شکل ۶ مقایسه نتایج دو مدل را در طول طیفی از سناریوهای مختلف نمایش می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، مدل قطعی در نقاط اولیه که هزینه عدم قطعیت صفر است، بیشترین مقدار تابع هدف را تولید می‌کند. بااین‌حال، با افزایش هزینه‌های ناشی از انحراف پارامترها، عملکرد این مدل به‌سرعت افت کرده و به کمترین مقدار تابع هدف می‌رسد. این نشان‌دهنده آن است که مدل قطعی، علیرغم ظاهر سودآور اولیه، در برابر نوسانات عملیاتی بسیار آسیب‌پذیر است و نمی‌تواند تصمیماتی پایدار ارائه دهد.

در مقایسه، مدل تصادفی که بر اساس سناریوهای احتمالی محدود و با سطح اطمینان معین عمل می‌کند، پایداری بیشتری دارد (شکل ۶) و تابع هدف آن با شیب ملایم‌تری کاهش می‌یابد.



شکل ۵ مقایسه مدل قطعی با مدل غیرقطعی

یافته‌های حاصل از تحلیل‌های عددی نشان می‌دهد که مهم‌ترین مزیت مدل پیشنهادی نه در افزایش مقدار تابع هدف، بلکه در افزایش پایداری تصمیمات تولیدی در مواجهه با عدم‌قطعیت نهفته است. اگرچه مدل قطعی در شرایط ایده‌آل عملکرد اقتصادی بهتری از خود نشان می‌دهد، اما نتایج شبیه‌سازی مونت‌کارلو نشان داد که این برتری در بسیاری از سناریوهای واقعی از بین می‌رود و عملکرد مدل به‌شدت تحت تأثیر نوسانات پارامترهای عملیاتی قرار می‌گیرد. در مقابل، مدل مبتنی‌بر CCP توانست با کاهش محدود مقدار تابع هدف، راه‌حل‌هایی ارائه دهد که در طیف وسیع‌تری از شرایط عملیاتی قابلیت اجرا و پایداری خود را حفظ می‌کنند.

یافته مهم دیگر پژوهش، نقش تعیین‌کننده ساختار شبکه تولید در پیچیدگی محاسباتی مدل است. نتایج تحلیل خوشه‌بندی نشان داد که تعداد کارخانه‌ها تأثیر بیشتری نسبت به سایر مجموعه‌ها بر رشد تعداد متغیرها، محدودیت‌ها و زمان حل دارد. این موضوع بیانگر آن است که در مسائل چندکارخانه‌ای، مدیریت ساختار شبکه و نحوه تخصیص ظرفیت میان کارخانه‌ها می‌تواند به اندازه سیاست‌های تولیدی در عملکرد سیستم اهمیت داشته باشد.

در مجموع، نتایج پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از مدل‌های مبتنی بر محدودیت‌های شانسی می‌تواند ابزاری مؤثر برای طراحی برنامه‌های تولید پایدار در محیط‌های چندکارخانه‌ای باشد و امکان ایجاد تعادل میان سودآوری و تاب‌آوری عملیاتی را برای مدیران فراهم سازد.

۷- نتیجه‌گیری و پیشنهادات مدیریتی

در این پژوهش یک مدل بهینه‌سازی ریاضی برای مسئله موردمطالعه با در نظر گرفتن عدم قطعیت در پارامترهای عملیاتی ارائه شد. به‌منظور مدل‌سازی عدم قطعیت در زمان‌های تولید، از رویکرد برنامه‌ریزی با محدودیت شانس استفاده شد تا امکان کنترل سطح ریسک در تصمیم‌گیری‌های عملیاتی فراهم گردد. نتایج حاصل از حل مسائل نمونه و تحلیل‌های عددی نشان داد که مدل پیشنهادی در مقایسه با رویکردهای قطعی، توانایی بیشتری در مدیریت نوسانات پارامترهای سیستم دارد و در شرایطی که زمان‌های تولید با عدم قطعیت همراه هستند، راه‌حل‌هایی پایدارتر و قابل اتکاتر ارائه می‌دهد. به‌بیان‌دیگر، ساختار مدل به‌گونه‌ای طراحی‌شده است که در مواجهه با تغییرات احتمالی در پارامترها، عملکرد سیستم دچار افت شدید نشده و سطح قابل قبولی از کارایی حفظ می‌شود؛ ویژگی‌ای که می‌توان آن را به‌عنوان نشانه‌ای از تاب‌آوری سیستم در برابر اختلالات و شرایط پیش‌بینی‌نشده تلقی کرد.

بررسی نتایج حاصل از آزمایش‌های عددی نشان داد که در میان پارامترهای مختلف مسئله، افزایش تعداد کارخانه‌ها بیشترین تأثیر را بر پیچیدگی محاسباتی مدل دارد. با افزایش تعداد کارخانه‌ها، تعداد متغیرهای تصمیم، قیود مدل و در نتیجه ابعاد فضای جستجو به شکل قابل‌توجهی افزایش می‌یابد که این امر منجر به افزایش زمان حل و دشوارتر شدن فرآیند دستیابی به جواب بهینه می‌شود. این یافته نشان می‌دهد که در کاربردهای واقعی با مقیاس بزرگ، توسعه روش‌های حل کاراتر، الگوریتم‌های فراابتکاری و یا روش‌های ترکیبی می‌تواند نقش مهمی در افزایش کارایی محاسباتی مدل ایفا کند.

از منظر مدیریتی، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که در محیط‌های تولیدی واقعی که غالباً با عدم قطعیت در زمان‌های پردازش، نوسانات عملیاتی و تغییرات در برنامه‌های تولید مواجه هستند، اتکا به مدل‌های قطعی ممکن است منجر به تصمیماتی شود که در عمل از پایداری کافی برخوردار نیستند. در چنین شرایطی، مدل ارائه‌شده در این پژوهش می‌تواند به‌عنوان یک ابزار تصمیم‌یار برای مدیران تولید مورد استفاده قرار گیرد و به آن‌ها کمک کند تا برنامه‌هایی را طراحی کنند که ضمن حفظ کارایی اقتصادی، از سطح اطمینان قابل قبولی نیز برخوردار باشند. به‌طور خاص، خروجی‌های مدل و تحلیل‌های حساسیت می‌تواند مدیران را در درک بهتر اثر عدم قطعیت بر عملکرد سیستم و همچنین ارزیابی میزان سرمایه‌گذاری موردنیاز برای کنترل یا کاهش این عدم قطعیت یاری دهد.

در نهایت، این پژوهش می‌تواند مبنایی برای توسعه مطالعات آتی در حوزه برنامه‌ریزی تولید تحت عدم قطعیت باشد. از جمله مسیرهای پیشنهادی برای تحقیقات آینده می‌توان به بررسی همزمان چندین منبع عدم قطعیت، توسعه مدل‌های داده‌محور مبتنی بر داده‌های واقعی صنعتی، استفاده از رویکردهای بهینه‌سازی استوار و مقایسه عملکرد آن‌ها با مدل‌های احتمالاتی، و نیز طراحی الگوریتم‌های فراابتکاری کارآمد برای حل مسائل در مقیاس بزرگ اشاره کرد. چنین توسعه‌هایی می‌تواند به افزایش قابلیت کاربرد مدل در محیط‌های صنعتی پیچیده و پویای امروزی کمک کند.

۸- پیشنهادات آتی

با توجه به نتایج حاصل از مدل برنامه‌ریزی چنددوره‌ای مبتنی بر محدودیت‌های شانسی و تحلیل‌های عددی انجام‌شده، چند مسیر پژوهشی مشخص و توسعه‌محور قابل طرح است. نخست، ازآنجاکه مدل حاضر بر فرض توزیع نرمال و در دسترس بودن پارامترهای آماری دقیق استوار است، توسعه چارچوب پژوهش در قالب رویکردهای بهینه‌سازی مقاوم می‌تواند وابستگی مدل به فروض توزیعی را کاهش دهد. مقایسه عملکرد سیاست‌های تصمیم‌گیری حاصل از مدل‌های احتمالی و مقاوم از منظر سودآوری، سطح خدمت و ریسک‌پذیری، می‌تواند بینش مدیریتی ارزشمندی در خصوص انتخاب رویکرد مناسب در شرایط داده‌ای مختلف فراهم سازد.

نتایج عددی نشان دادند که تغییر سطح اطمینان تأثیر مستقیمی بر ظرفیت تخصیص‌یافته و سود نهایی سیستم دارد؛ ازاین‌رو، پیشنهاد می‌شود در مطالعات آتی یک تحلیل حساسیت چندبعدی و ساختارمند بر روی پارامترهای ریسک (مانند سطح اطمینان، انحراف معیارها و ضرایب هزینه) انجام شود تا منحنی مبادله ریسک–بازده استخراج گردد. چنین تحلیلی می‌تواند به مدیران

نشان دهد که کاهش هر واحد عدم‌قطعیت یا افزایش هر سطح اطمینان، چه تأثیری بر سود خالص سیستم خواهد داشت و تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاری در کاهش نوسانات تولید تا چه حد توجیه‌پذیر است.

در مدل حاضر، محدودیت ظرفیت و اقلام معیوب در قالب یک ساختار خطی‌شده وارد مدل شدند. توسعه این چارچوب به سمت مدل‌های پویا و غیرخطی وابسته به بارکاری می‌تواند دقت بازنمایی واقعیت صنعتی را افزایش دهد؛ به‌ویژه در شرایطی که نرخ خرابی تجهیزات تابعی از شدت استفاده یا فشار زمانی باشد. ترکیب چنین ساختاری با رویکردهای شبیه‌سازی–بهینه‌سازی می‌تواند امکان ارزیابی دقیق‌تر سیاست‌های تولید و تعمیرات را فراهم کند.

با توجه به اینکه خطی‌سازی انجام‌شده مدل را به یک مسئله MILP تبدیل نموده است، در ابعاد بزرگ صنعتی زمان حل می‌تواند افزایش یابد. بنابراین توسعه الگوریتم‌های فراابتکاری ترکیبی یا روش‌های تجزیه مانند Benders Decomposition یا Lagrangian Relaxation می‌تواند به حل مسائل در مقیاس واقعی کمک کند. مقایسه کارایی این روش‌ها با حل‌کننده‌های دقیق تجاری، از منظر زمان حل و کیفیت جواب، یکی دیگر از مسیرهای قابل‌توجه پژوهشی است.

علاوه بر این، با گسترش فناوری‌های مرتبط با انقلاب صنعتی چهارم (Industry 4.0) و افزایش دسترسی به داده‌های عملیاتی حاصل از سیستم‌های تولیدی هوشمند، حسگرهای صنعتی و سامانه‌های برنامه‌ریزی منابع سازمان (ERP)، استفاده از رویکردهای داده‌محور به‌عنوان یکی از مسیرهای مهم پژوهشی قابل‌توجه است. در چنین چارچوبی، به‌جای اتکا صرف به فروض توزیعی از پیش تعیین‌شده، پارامترهای عدم‌قطعیت می‌توانند مستقیماً از داده‌های تاریخی یا جریان داده‌های لحظه‌ای استخراج‌شده و در فرآیند تصمیم‌گیری وارد شوند. ترکیب مدل‌های بهینه‌سازی با روش‌های یادگیری ماشین و تحلیل داده می‌تواند به تخمین دقیق‌تر پارامترهای تصادفی، به‌روزرسانی پویا مدل و درنهایت اتخاذ تصمیمات سازگارتر با شرایط واقعی محیط‌های تولیدی منجر شود. این رویکردها می‌توانند قابلیت انطباق‌پذیری مدل‌های برنامه‌ریزی تولید را در محیط‌های داده‌محور و پویا به‌طور قابل‌توجهی افزایش دهند.

در نهایت، اعتبارسنجی تجربی مدل از طریق اجرای یک مطالعه موردی صنعتی واقعی و استفاده از داده‌های عملیاتی، می‌تواند قابلیت تعمیم و کاربردپذیری مدل پیشنهادی را به‌صورت تجربی مورد آزمون قرار دهد. چنین مطالعاتی این امکان را فراهم می‌سازد تا تفاوت بین عملکرد پیش‌بینی‌شده مدل و عملکرد واقعی سیستم اندازه‌گیری شده و اصلاحات لازم برای استقرار عملی مدل ارائه گردد.

مراجع

[1] Raoufi M, Amin-Naseri MR, Ebrahimnejad S. Aggregate production planning under uncertainty: A comprehensive literature review and future research directions. International Journal of Production Research. 2025; 63: 1015-1052.

[2] Mula J, Poler R, Garcia Sabater J, Lario FC. Models for production planning under uncertainty: A review. International Journal of Production Economics. 2006; 103: 271-285. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2005.09.001

[3] Vahabi E, Jafari A, Sahraeian R. Scenario-based stochastic optimization of perishable goods supply chain networks: Considering disruption and utilizing machine learning. International Journal of Engineering. 2026; 39: 1305-1325. https://doi.org/10.5829/ije.2026.39.06c.01

[4] Pishvaee MS, Jolai F, Razmi J. A stochastic optimization model for integrated forward/reverse logistics network design. Journal of Manufacturing Systems. 2009; 28: 107-114. https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2010.05.001

[5] Zhen L. Analytical study on multi-product production planning with outsourcing. Computers & Operations Research. 2012; 39: 2100-2110. https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.10.015

[6] Christopher M, Holweg M. Supply chain 2.0 revisited: a framework for managing volatility-induced risk in the supply chain. International Journal of Physical Distribution and Logistics Management. 2017; 47: 2-17. https://doi.org/10.1108/IJPDLM-09-2016-0245

[7] Karimi, S., Ardalan, Z., Poursabzi, O. et al. Toward a safe supply chain: Incorporating accident, physical, psychosocial and mental overload risks into supply chain network. Environ Dev Sustain. 2023; 25: 5579–5595. https://doi.org/10.1007/s10668-022-02281-y

[8] Boulaksil Y, Grunow M, Fransoo JC. Capacity flexibility allocation in an outsourced supply chain with reservation. International Journal of Production Economics. 2011; 129: 111-118. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2010.09.010

[9] Mula J, Peidro D, Díaz-Madroñero M, Vicens E. Mathematical programming models for supply chain production and transport planning. European Journal of Operational Research. 2010; 204: 377-390. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.09.008

[10] Aazami A, Saidi-Mehrabad M. A production and distribution planning of perishable products with a fixed lifetime under vertical competition in the seller-buyer systems: A real-world application. Journal of Manufacturing Systems. 2021; 58: 223-247. https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2020.12.001

[11] Francie KA, Kenne J-P, Dejax P, Songmene V, Polotski V. Stochastic models and numerical solutions for manufacturing/remanufacturing systems with applications to the printer cartridge industry. Journal of Manufacturing Systems. 2015; 37: 662-671. https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2014.11.019

[12] Kenné JP, Dejax P, Gharbi A. Production planning of a hybrid manufacturing–remanufacturing system under uncertainty within a closed-loop supply chain. International Journal of Production Economics. 2012; 135: 81-93. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2010.10.026

[13] Teunter R. Lot-sizing for inventory systems with product recovery. Computers & Industrial Engineering. 2004; 46: 431-441. https://doi.org/10.1016/j.cie.2004.01.006

[14] Poursabzi O, Mohammadi M, Naderi B. An improved model and a heuristic for capacitated lot sizing and scheduling in job shop problems. Scientia Iranica. 2017; 24: 2962-2974. https://doi.org/10.24200/sci.2017.20016

[15] Dohale V, Ambilkar P, Gunasekaran A, Bilolikar V. A multi-product and multi-period aggregate production plan: a case of automobile component manufacturing firm. Benchmarking: An International Journal. 2021; 29: 3396-3425. https://doi.org/10.1108/BIJ-07-2021-0425

[16] Aazami A, Saidi Mehrabad M. A production and distribution planning of perishable products with a fixed lifetime under vertical competition in the seller–buyer systems: A real world application. Journal of Manufacturing Systems. 2021; 58: 223-247. https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2020.12.001

[17] Abdelsalam HM, Elassal MM. Joint economic lot sizing problem for a three-layer supply chain with stochastic demand. International Journal of Production Economics. 2014; 155: 272-283. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2014.01.015

[18] Acar Y, Atadeniz SN. Comparison of integrated and local planning approaches for the supply network of a globally dispersed enterprise. International Journal of Production Economics. 2015; 167: 204-219. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2015.05.028

[19] Banasik A, Kanellopoulos A, Bloemhof Ruwaard JM, Claassen GDH. Accounting for uncertainty in eco efficient agri food supply chains: A case study for mushroom production planning. Journal of Cleaner Production. 2019; 216: 249-256. https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.01.153

[20] Hu Z, Hu G. A two-stage stochastic programming model for lot-sizing and scheduling under uncertainty. International Journal of Production Economics. 2016; 180: 198-207. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2016.07.027

[21] Jabbarzadeh A, Haughton M, Pourmehdi F. A robust optimization model for efficient and green supply chain planning with postponement strategy. International Journal of Production Economics. 2019; 214: 266-283. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2018.06.013

[22] Gholamian N, Mahdavi I, Tavakkoli-Moghaddam R, Mahdavi-Amiri N. Comprehensive fuzzy multi-objective multi-product multi-site aggregate production planning decisions in a supply chain under uncertainty. Applied Soft Computing. 2015; 37: 585-607. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.08.041

[23] Ahmed W, Moazzam M, Sarkar B, Ur Rehman S. Synergic effect of reworking for imperfect quality items with the integration of multi-period delay-in-payment and partial backordering in global supply chains. Engineering. 2021; 7: 260-271. https://doi.org/10.1016/j.eng.2020.07.022

[24] Tiwari S, Daryanto Y, Wee HM. Sustainable inventory management with deteriorating and imperfect quality items considering carbon emission. Journal of Cleaner Production. 2018; 192: 281-292. https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.04.261

[25] Kang K, Pu W, Ma Y. A dynamic programming-based sustainable inventory-allocation planning problem with carbon emissions and defective item disposal under a fuzzy random environment. Mathematical Problems in Engineering. 2018; 2018. https://doi.org/10.1155/2018/9376080

[26] Ullah M, Asghar I, Zahid M, Omair M, AlArjani A, Sarkar B. Ramification of remanufacturing in a sustainable three-echelon closed-loop supply chain management for returnable products. Journal of Cleaner Production. 2021; 290: 125609. https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.125609